CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2505

DATA: **12 maja 2025 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

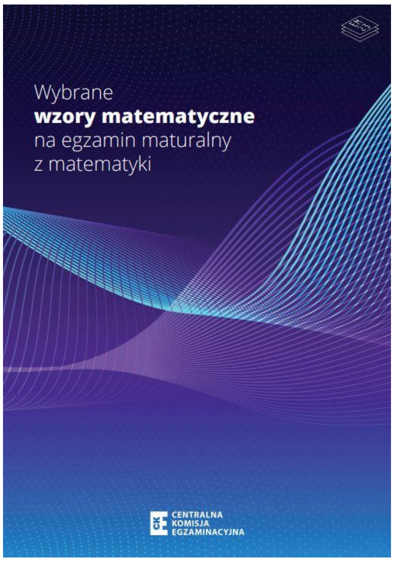
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki są umieszczone na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–2)

W warunkach laboratoryjnych obserwowano dynamikę wzrostu liczebności populacji pewnego gatunku bakterii. Liczebność N populacji bakterii zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą

$$N(t) = N_0 \cdot k^t \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

N_0 – liczebność populacji w chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji,
k – stała dodatnia, charakterystyczna dla danego gatunku bakterii i dla warunków przeprowadzenia obserwacji,
t – czas wyrażony w godzinach, liczony od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

W chwili rozpoczęcia obserwacji liczebność populacji była równa $10\,000$, a po dwóch godzinach była równa $15\,625$.

1.
0–1–2

Oblicz, o ile procent wzrastała liczebność populacji tej bakterii w ciągu każdej godziny. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

2.
0–1–2–3

Zadanie 3. (0–3)

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC. Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3.
0–1–2–3

Oblicz miarę kąta DAC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek.

4.
0–1–2–3

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek. Zapisz obliczenia.

5.
0–1–2–3–4

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$|x-2| - 2 \cdot |x+3| < -2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–4)

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny. W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

6.
0–1–2–3–4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD punkt E jest środkiem ramienia AD, a punkt F jest środkiem ramienia BC trapezu. Stosunek pola trapezu $EFCD$ do pola trapezu $ABFE$ jest równy $\frac{1}{2}$.

7.
0–1–2–3–4

Wykaż, że $\frac{|CD|}{|AB|} = \frac{1}{5}$.

Zadanie 8. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi $\mathcal{O}_1$ oraz $\mathcal{O}_2$ o równaniach:

- $\mathcal{O}_1$: $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$
- $\mathcal{O}_2$: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 45$.

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B. Punkt A ma pierwszą współrzędną dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

8.
0–1–2–3–4–5

Oblicz współrzędne punktów A, B oraz M. Zapisz obliczenia.

9.
0–1–2–3–4–5

Zadanie 9. (0–5)

Rozwiąż równanie

$$3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$**. Zapisz obliczenia.**

Zadanie 10. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

10.
0–1–2–3–4–5

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2-m)x^2 - 2(2m+1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x, gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2.

11.
0–1–2–3–4–5–6

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$(x_1 - x_2)^2 \leq 180$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

Zadanie 12.1. (0–2)

12.1.
0–1–2

Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$\boldsymbol{V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}}$$

Zadanie 12.2. (0–4)

Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

12.2.
0–1–2–3–4

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą objętość. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2023

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2023

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
Formuła 2023