

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa I - zakres podstawowy
Etap rejonowy – 07.02.2004 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Uzasadnij, że $27^{50} : 81^{37}$ jest liczbą większą od 8 .

Zadanie 2 (2 pkt)

Spośród 40 uczniów pewnej klasy 17 gra w szachy, 21 w brydża, a 6 gra w szachy i w brydża. Ilu uczniów :

- a) gra w brydża a nie gra w szachy,
- b) nie gra ani w szachy ani w brydża ?

Zadanie 3 (3 pkt)

Wykaż, że liczba $3^{n+3} + 2^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2}$ jest podzielna przez 6 dla dowolnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$

Zadanie 4 (3 pkt)

Narysuj trójkąt ABC, którego wszystkie kąty są ostre. Znajdź środek O boku AB i zakreśl okrąg o środku O i promieniu długości OA. Okrąg ten przetnie odpowiednio bok BC w punkcie D, a bok AC w punkcie E. Poprowadź odcinki AD, BE. Czym są te odcinki dla trójkąta ABC? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5 (4 pkt)

Robertowi podano szklankę czarnej kawy. Wypił 0,2 szklanki kawy i dopełnił szklankę mlekiem. Następnie po wymieszaniu znów wypił 0,2 zawartości szklanki i znów dopełnił mlekiem. Ponownie wymieszał i po wypiciu $\frac{3}{5}$ zawartości szklanki obliczył, że w pozostałej części jest o 28 cm^3 więcej kawy niż mleka. Oblicz jaka była pojemność szklanki.

Zadanie 6 (4 pkt)

Uzasadnij, że

$$\frac{a^2 + 1}{a \sqrt{\left(\frac{a^2 - 1}{2a}\right)^2 + 1}} = \begin{cases} 2 & \text{dla } a > 0 \\ -2 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Zadanie 7 (4 pkt)

W trapezie równoramiennym ABCD wysokość ma długość 14 cm, a jego przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się w stosunku 2:5. Oblicz pole tego trapezu

Zadanie 8 (4 pkt)

Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie układu równań :

$$\begin{cases} 2x + y = m \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

jest parą liczb o różnych znakach?

Zadanie 9 (5 pkt)

Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny ABCD ($AB \perp AD$) znajduje się w odległości 6 i 8 jednostek od końców dłuższego ramienia. Oblicz obwód trapezu.

Zadanie 10 (5 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy jest równy α , natomiast wysokość ostrosłupa ma długość h . Wyznacz objętość ostrosłupa w zależności od α i h .

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy I – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie dzielniej i dzielnika w postaci potęgi o podstawie 3 ; $3^{150} : 3^{148}$	1
	Obliczenie ilorazu potęg o tej samej podstawie ; 9	1
2	Przedstawienie danych na schemacie Venna	0,5
	Podanie liczby uczniów spełniających warunek zapisany w punkcie 2a ; 15 uczniów	0,5
	Podanie liczby uczniów spełniających warunek zapisany w punkcie 2b ; 8 uczniów	1
3	Zapisanie każdego ze składników sumy w postaci iloczynowej	1
	Dokonanie redukcji wyrazów podobnych	1
	Zapisanie wyrażenia w postaci iloczynowej	0,5
	Udzielenie odpowiedzi z uzasadnieniem	0,5
4	Rysunek	0,5
	Uzasadnienie, że kąty ADB i BEA są proste (kąty wpisane oparte na półokręgu)	1,5
	Udzielenie odpowiedzi: odcinki są wysokościami w trójkącie ABC	1
5	Zapisanie objętości kawy i mleka w szklance po pierwszym dopełnieniu szklanki mlekiem ; $\frac{4}{5}x, \frac{1}{5}x$ gdzie x jest pojemnością szklanki	0,5
	Zapisanie objętości kawy i mleka w szklance po drugim dopełnieniu szklanki mlekiem ; $\frac{16}{25}x, \frac{9}{25}x$	1
	Zapisanie objętości kawy i mleka po wypiciu 0,6 zawartości szklanki ; $\frac{32}{125}x, \frac{18}{125}x$	1
	Ułożenie równania $\frac{32}{125}x = \frac{18}{125}x + 28$	1
	Rozwiązanie równania i udzielenie odpowiedzi ; $x = 250 \text{ cm}^3$	0,5
6	Sprowadzenie do wspólnego mianownika składników sumy znajdującej się w mianowniku pod pierwiastkiem; $\frac{a^2 + 1}{a\sqrt{(a^2 - 1)^2 + 4a^2}}$	1
	Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia i wyciągnięcie wyrażenia przed pierwiastek ; $\frac{2 a (a^2 + 1)}{a\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}}$	1
	Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia do wyrażenia pod pierwiastkiem i zapisanie ułamka w postaci; $\frac{2 a (a^2 + 1)}{a a^2 + 1 }$ czyli $\frac{2 a }{a}$	1
	Uzasadnienie, że $\frac{2 a }{a} = \begin{cases} 2 & \text{dla } a > 0 \\ -2 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$	1
7	Uzasadnienie, że długość odcinka EB gdzie E jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D jest równa $\frac{a+b}{2}$ gdzie a, b są długościami podstaw trapezu	1

	Udowodnienie, że trójkąt EBD jest trójkątem prostokątnym równoramiennym (kąty przy podstawie mają miary równe 45^0)	1
	Podanie długości boku EB : $ EB = 14$ cm	1
	Obliczenie pola trapezu	1
8	Wyznaczenie wyznaczników: $W = 5$, $W_x = 3m - 2$, $W_y = 4 - m$	1,5
	Zapisanie rozwiązania układu równań; $x = \frac{W_x}{W} = \frac{3m-2}{5}$, $y = \frac{W_y}{W} = \frac{4-m}{5}$	1
	Rozpatrzenie alternatywy dwóch przypadków : ($3m - 2 > 0$ i $4 - m < 0$) lub ($3m - 2 < 0$ i $4 - m > 0$)	0,5
	Rozwiązanie układu : $m \in (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (4, +\infty)$	1
9	Wykazanie, że kąt COB jest kątem prostym, gdzie O jest środkiem okręgu wpisanego w trapez	1,5
	Obliczenie długości dłuższego ramienia trapezu; $ BC = 10$	0,5
	Obliczenie promienia okręgu wpisanego w trapez; $r = 4,8$	1
	Obliczenie długości odcinków EB i FC, gdzie $E \in AB$, $F \in CD$ i EF jest średnicą okręgu poprowadzoną prostopadle do podstaw; $ EB = 6,4$, $ FC = 3,6$	1
	Podanie długości odcinków AE i DF: $ AE = DF = 4,8$	0,5
	Obliczenie obwodu trapez: 39,2	0,5
10	Rysunek z oznaczeniami	1
	Zapisanie długości a krawędzi podstawy przy pomocy wysokości h_1 ściany bocznej $a = \frac{2h_1}{\operatorname{tg} \alpha}$	1
	Obliczenie : $a^2 = \frac{4h^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$	2
	Obliczenie objętości ostrosłupa ; $V = \frac{4h^3}{3(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.