

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa I LO, I Technikum – zakres podstawowy
Etap rejonowy – 02.12.2006 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wykaż, że suma $7^8 + 7^7 + 7^6 + 7^5 + \dots + 7^2 + 7$ jest podzielna przez 56.

Zadanie 2 (2 pkt)

Dany jest zbiór $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Podaj za pomocą tabelek dwie funkcje g, h z których każda odwzorowuje zbiór A w zbiór A i ponadto:

- g jest funkcją rosnącą
- h ma jedno miejsce zerowe równe 2.

Zadanie 3 (3 pkt)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość b dla której wykres funkcji $y = -3x + b$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem $ABCD$, gdzie $A(-1, -1)$, $B(3, -1)$, $C(3, 2)$, $D(-1, 2)$.

Zadanie 4 (3 pkt)

Ojciec ma 48 lat, a syn 21. Przed ilu laty ojciec był 10 razy starszy od swego syna?

Zadanie 5 (4 pkt)

Obwód prostokąta jest równy l a jego pole powierzchni p . Oblicz długość przekątnej tego prostokąta. W obliczeniach możesz wykorzystać wzór skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Zadanie 6 (4 pkt)

Kwadrat podzielono na dwa prostokąty, których stosunek obwodów wynosi 5:4.

Jaki jest stosunek pól tych prostokątów?

Zadanie 7 (4 pkt)

W trójkącie równoramiennym ABC , gdzie $|AC| = |BC|$, podstawa przystaje do wysokości opuszczonej na nią i ma długość h centymetrów. Wyznacz długość odcinka AM , gdzie M jest środkiem boku BC . Wykorzystaj twierdzenie „Środkowe w trójkącie przecinają się w punkcie O , który dzieli każdą z nich na dwie części, z których odcinek łączący wierzchołek z punktem O jest dwa razy dłuższy od pozostałej części tej środkowej”.

Zadanie 8 (4 pkt)

W zbiorze 40 000 żarówek 3% stanowią żarówki uszkodzone. Ile co najmniej uszkodzonych żarówek trzeba usunąć, aby w pozostałych było mniej niż 2% żarówek uszkodzonych?

Zadanie 9 (5 pkt)

Wskazówki zegara wskazują dokładnie godzinę dziewiątą. Oblicz po jakim czasie (od tej chwili) wskazówka minutowa „dogoni” wskazówkę godzinową, zakładając, że wskazówki poruszają się ruchem jednostajnym.

Zadanie 10 (5 pkt)

Znajdź pole trójkąta ograniczonego wykresami funkcji : $y = |x - 2|$ i $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Życzymy powodzenia!

Kryteria oceniania dla klasy I LO, I Technikum– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt									
1	Zapisanie sumy w postaci: $7^7(7+1) + 7^5(7+1) + 7^3(7+1) + \dots + 7(7+1)$	1									
	Uzasadnienie, że tak zapisana liczba jest podzielna przez 56	1									
2	Zapisanie funkcji g za pomocą tabelki	1									
	Zapisanie funkcji h za pomocą tabelki	1									
3	Rysunek układu współrzędnych z zaznaczonymi wierzchołkami prostokąta	0,5									
	Zauważenie i uzasadnienie, że wykres musi przechodzić przez punkt $C(3,2)$ lub przez punkt $A(-1, -1)$	1,5									
	Wyznaczenie najmniejszej i największej wartości b : najmniejsza wartość $b = -4$, największa wartość $b = 11$	1									
4	Analiza zadania: <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td></td><td>Aktualny wiek</td><td>Wiek przed x laty</td></tr> <tr> <td>Ojciec</td><td>48</td><td>$48 - x$</td></tr> <tr> <td>syn</td><td>21</td><td>$21 - x$</td></tr> </table>		Aktualny wiek	Wiek przed x laty	Ojciec	48	$48 - x$	syn	21	$21 - x$	1
	Aktualny wiek	Wiek przed x laty									
Ojciec	48	$48 - x$									
syn	21	$21 - x$									
	Zapisanie równania: $(48 - x) = 10(21 - x)$	1									
	Rozwiązanie równania i udzielenie odpowiedzi: $x = 18$. Ojciec był 10 razy starszy od swojego syna 18 lat temu	1									
5	Analiza zadania: a, b długości boków prostokąta o danym polu p i obwodzie l	0,5									
	Zapisanie związków pomiędzy a, b i obwodem, polem prostokąta: $a + b = \frac{1}{2}l$, $a b = p$, gdzie l jest obwodem a p polem prostokąta	1									
	Zapisanie wzoru na kwadrat przekątnej d z wykorzystaniem Twierdzenia Pitagorasa: $d^2 = a^2 + b^2$	0,5									
	Przekształcenie wzoru na kwadrat przekątnej do postaci: $d^2 = (a + b)^2 - 2ab$	1									
	Zapisanie d przy pomocy l i p : $d = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 8p}$	1									
6	Rysunek i analiza zadania np.: a długość boku kwadratu, x długość jednego z boków prostokąta oraz zapisanie założenia, że $0 < x < a$	0,5									
	Zapisanie stosunku obwodów otrzymanych prostokątów: $\frac{2x + 2a}{2(a - x) + 2a} = \frac{5}{4}$	1									
	Obliczenie x : $x = \frac{2}{3}a$	1									
	Obliczenie pól prostokątów: $P_1 = \frac{2a^2}{3}$, $P_2 = \frac{a^2}{3}$	1									
	Obliczenie stosunku pól prostokątów: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{2}{1}$	0,5									
7	Rysunek wraz z oznaczeniami np.: h - długość wysokości i długość podstawy	0,5									
	Zauważenie, że odcinki CD i AM są środkowymi, gdzie D jest spodkiem wysokości oraz zapisanie związków pomiędzy długościami odcinków: $ CO = \frac{2}{3}h, \quad OD = \frac{1}{3}h, \text{ gdzie } O \text{ jest punktem przecięcia się środkowych}$	1									

	Obliczenie długości odcinka AO z trójkąta prostokątnego ADO : $ AO ^2 = \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + \left(\frac{1}{3}h\right)^2$ czyli $ AO = \frac{\sqrt{13}}{6}h$	1
	Obliczenie długości odcinka OM wykorzystując zależność $ OM = \frac{1}{2} AO $: $ OM = \frac{\sqrt{13}}{12}h$	0,5
	Obliczenie długości środkowej AM : $ AM = \frac{\sqrt{13}}{4}h$	1
8	Analiza zadania: x - liczba żarówek uszkodzonych, które trzeba usunąć, 3% z 40 000 czyli 1200 - liczba uszkodzonych żarówek w zbiorze, (1 200 - x) - liczba żarówek uszkodzonych po usunięciu x żarówek, (40 000 - x) - liczba wszystkich żarówek po usunięciu x żarówek	1
	Zapisanie rozwiązania zadania w postaci : $1200 - x < 0,02(40\,000 - x)$	1,5
	Rozwiązanie nierówności: $x > 408\frac{8}{9}$	1
	Udzielenie odpowiedzi: należy usunąć co najmniej 409 żarówek uszkodzonych z danego zbioru, aby pozostałe stanowiły mniej niż 2% ogółu żarówek	0,5
9	Analiza zadania np.: x - ilość minutowych działek, które przejdzie wskazówka godzinowa do chwili spotkania, $45+x$ - ilość minutowych działek dla wskazówki minutowej	1,5
	Zauważenie, że wskazówka godzinowa przechodzi $\frac{1}{12}$ drogi wskazówki minutowej	1
	Zapisanie równania $x = \frac{45+x}{12}$ i rozwiązanie: $x = 4\frac{1}{11}$	1,5
	Obliczenie po ilu minutach wskazówka minutowa „dogoni” wskazówkę godzinową: $45 + 4\frac{1}{11} = 49\frac{1}{11}$ i udzielenie odpowiedzi	1
10	Wykonanie wykresu funkcji $y = x - 2 $	1
	Wykonanie wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x + 2$	0,5
	Ułożenie alternatywy warunków: $\begin{cases} x < 2 \\ y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x > 2 \\ y = x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ w celu wyznaczenia współrzędnych wierzchołków trójkąta	1,5
	Obliczenie współrzędnych wierzchołków : (0,2), (8,6), (2,0)	1
	Obliczenie długości przyprostokątnych: $6\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ oraz obliczenie pola: 12	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.