

**Międzyszkolne Zawody Matematyczne**  
**Poziom I – zakres podstawowy**  
**Etap rejonowy – 13.12.2008 rok**  
**Czas rozwiązywania zadań 150 minut**

**Zadanie 1 ( 2 pkt )**

Wykaż, że liczba  $2+2+2+\dots+2$  jest podzielna przez 3

**Zadanie 2 ( 2 pkt )**

Wyznacz wszystkie liczby całkowite  $n$  spełniające równanie  $2-(4n)=2n$

**Zadanie 3 ( 3 pkt )**

Usuń niewymierność z mianownika poniższego wyrażenia:

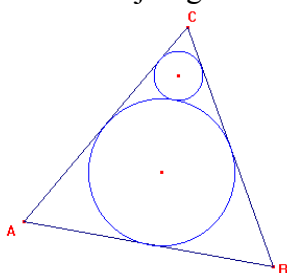
$$\frac{1}{3+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

**Zadanie 4 ( 3 pkt )**

Skonstruuj odcinek będący bokiem kwadratu mając dany odcinek o długości równej różnicy długości przekątnej i długości boku tego kwadratu. Podaj opis konstrukcji.

**Zadanie 5 ( 4 pkt )**

W trójkąt równoboczny ABC o wysokości 3 cm wpisano okrąg. Następnie wpisano mniejszy okrąg styczny zewnętrznie do większego okręgu tak jak to przedstawiono na rysunku Oblicz promień mniejszego z okręgów.



**Zadanie 6 ( 4 pkt )**

Punkt O jest punktem wewnętrznym trójkąta równobocznego ABC. Wysokość ma długość  $5\sqrt{3}$ . Oblicz sumę odległości punktu O od boków tego trójkąta

**Zadanie 7 ( 4 pkt )**

Wykaż, że liczba  $\sqrt{302-9302}$  jest liczbą naturalną.

**Zadanie 8 ( 4 pkt )**

Dwaj uczniowie Piotr i Paweł wyszli jednocześnie z tego samego domu do szkoły. Pierwszy z nich miał krok o 20% krótszy od drugiego, ale za to zdążył zrobić w tym samym czasie o 20% więcej kroków. Który z nich przyjdzie wcześniej do szkoły

**Zadanie 9 ( 5 pkt )**

Suma cyfr liczby dwucyfrowej należy do zbioru rozwiązań nierówności  $|t-9|-1 < 0$ . Jeżeli w tej liczbie przestawimy cyfry, to stosunek otrzymanej liczby do liczby początkowej będzie wynosił 5:6. Jakie to liczby?

**Zadanie 10 ( 5 pkt )**

Dany jest kwadrat o boku długości  $a$ . Każdy bok kwadratu jest średnicą koła. Wspólne części odpowiednich par kół tworzą wewnątrz kwadratu rozetę czterolistną. Oblicz pole tej rozety ( pole jej czterech listków). Wykonaj rysunek.

**Życzymy powodzenia**

### Kryteria oceniania dla poziomu I zakres podstawowy

| Nr zad | Wykonana czynność                                                                                                                                                                                           | Liczba pkt |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1      | Zapisanie sumy w postaci: <del><math>2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}</math></del>                                                                                                                                     | 1          |
|        | Zapisanie sumy w postaci: <del><math>3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}</math></del>                                                                                                                                     | 1          |
| 2      | Zapisanie warunków dla $n$ : $4 - n > 0$ i $2n + 4 > 0$ i $n$ jest liczbą całkowitą, czyli <del><math>n \in \{1, 2, 3\}</math></del>                                                                        | 1          |
|        | Dokonanie właściwego wyboru liczb spełniających warunek: 0, 1, 2                                                                                                                                            | 1          |
| 3      | Zapisanie wyrażenia w postaci: $\frac{1}{3+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$                                                                                        | 0,5        |
|        | Przekształcenie wyrażenia do postaci: $\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6\sqrt{3}+7}$                                                                                                                             | 1          |
|        | Przekształcenie wyrażenia do postaci: $\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6\sqrt{3}+7} \cdot \frac{6\sqrt{3}-7}{6\sqrt{3}-7}$                                                                                       | 0,5        |
|        | Przekształcenie wyrażenia do postaci: <del><math>\frac{1 \cdot 3 + 7 \cdot 5 - 6 \cdot 1 - 5}{59}</math></del>                                                                                              | 1          |
| 4      | Znajomość wzoru na długość przekątnej kwadratu                                                                                                                                                              | 0,5        |
|        | Zapisanie długości boku kwadratu w postaci: <del><math>a = m + m\sqrt{2}</math></del> , gdzie $m$ jest różnicą długości przekątnej i boku kwadratu                                                          | 1          |
|        | Podanie opisu konstrukcji odcinka <del><math>a = m + m\sqrt{2}</math></del>                                                                                                                                 | 1,5        |
| 5      | Poprowadzenie prostej przechodzącej przez punkt styczności okręgów i równoległej do prostej AB                                                                                                              | 0,5        |
|        | Wykazanie, że trójkąty EFC (punkty E i F to punkty przecięcia się poprowadzonej prostej z bokami trójkąta) i ABC są podobne w skali 1:3                                                                     | 2          |
|        | Obliczenie długości wysokości trójkąta EFC: 1 cm                                                                                                                                                            | 0,5        |
|        | Obliczenie długości promienia mniejszego okręgu: $\frac{1}{3}$                                                                                                                                              | 1          |
| 6      | Obliczenie długości boku trójkąta; $a = 10$                                                                                                                                                                 | 0,5        |
|        | Zapisanie pola trójkąta w postaci: <del><math>\frac{10 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{2}</math></del> gdzie <del><math>\frac{10 \cdot 10 \cdot \sqrt{3}}{2}</math></del> to odległości punktu O od boków trójkąta | 2          |
|        | Zapisanie równania: <del><math>2\sqrt{3} = 10 \cdot \sqrt{3}</math></del>                                                                                                                                   | 1          |
|        | Obliczenie sumy odległości punktu O od boków trójkąta: $5\sqrt{3}$                                                                                                                                          | 0,5        |
| 7      | Postawienie hipotezy, że istnieje liczba naturalna $n$ , taka, że $\sqrt{302} - \sqrt{302} = n$                                                                                                             | 0,5        |
|        | Zapisanie kwadratu liczby $n$ : <del><math>n^2 = 302 - 302</math></del>                                                                                                                                     | 1          |
|        | Zapisanie kwadratu liczby $n$ w postaci: <del><math>n^2 = 302 - 302</math></del>                                                                                                                            | 1          |
|        | Obliczenie kwadratu liczby $n$ : $n^2 = 4$                                                                                                                                                                  | 1          |

|    |                                                                                                                           |     |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|    | Obliczenie $n$ : $n = 2$                                                                                                  | 0,5 |
| 8  | Analiza zadania: $x$ – długość kroku Pawła, $y$ – liczba kroków Pawła w określonym czasie                                 | 0,5 |
|    | Zapisanie długości kroków i liczby kroków dla Piotra : $0,8x$ - długość kroku, $1,2y$ – liczba kroków w określonym czasie | 1   |
|    | Zapisanie drogi Pawła ( $D_1$ ) i drogi Piotra ( $D_2$ ): $D_1 = x \cdot y$ , $D_2 = 0,8x \cdot 1,2y$                     | 1   |
|    | Znalezienie zależności pomiędzy drogą Pawła i drogą Piotra przebytą w określonym czasie : $D_2 = \frac{24}{25}D_1$        | 1   |
|    | Udzielenie odpowiedzi : $D_2 < D_1$ , a więc Paweł przyjdzie wcześniej do szkoły                                          | 0,5 |
| 9  | Założenie : $t \in \mathbb{N}$ i $t \leq 11$                                                                              | 0,5 |
|    | Rozwiązanie nierówności : $t = 9$ i sprawdzenie czy spełnia założenie                                                     | 1   |
|    | Zapisanie liczby początkowej i liczby o przestawionych cyfrach:<br>$10x + y$ , $10y + x$                                  | 1   |
|    | Zapisanie układu równań : $\begin{cases} x + y = 9 \\ \frac{10y + x}{10x + y} = \frac{5}{6} \end{cases}$                  | 1   |
|    | Rozwiązanie układu równań : $x = 5$ , $y = 4$                                                                             | 1   |
|    | Sprawdzenie czy otrzymana para spełnia warunki zadania i udzielenie odpowiedzi : poszukiwane liczby to 45 i 54            | 0,5 |
| 10 | Zauważenie, że suma pola rozety i pola kwadratu jest równa sumie pól dwóch kół (czterech półkoli) o promieniu $0,5a$      | 2   |
|    | Obliczenie pól dwóch kół : $P_1 = 2\pi \frac{a^2}{4} = \pi \frac{a^2}{2}$                                                 | 1,5 |
|    | Obliczenie pola kwadratu: $P_2 = a^2$                                                                                     | 0,5 |
|    | Obliczenie pola rozety: $P_1 + P_2 = \frac{a^2(\pi + 2)}{2}$                                                              | 1   |

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.