

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa I LO i I Technikum, podstawowy zakres nauczania matematyki
etap rejonowy 18.12.2010 r.

Czas rozwiązywania zadań – 150 minut.

Zadanie 1-(2p) Marek rzuca monetą. Jeśli wypadnie orzeł zdobywa 10 punktów, jeśli reszka – zdobywa 7 punktów. Marek zdobył 88 punktów. Ile razy rzucał monetą?

Zadanie 2-(2p) Cenę sukienki obniżono najpierw o 50%, potem o 25%, a na końcu o 20%. O ile procent zmniejszyła się cena sukienki?

Zadanie 3-(3p) Adam jest 3 razy starszy od Kasi, a Bartek jest 2 razy młodszy od Adama i o 2 lata starszy od Kasi. Ile lat będzie miał Bartek, gdy Kasia będzie miała połowę lat Adama?

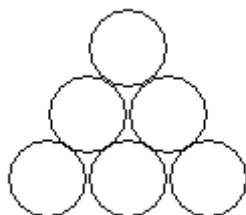
Zadanie 4-(3p) Oblicz $x + y + z$, wiedząc, że $x + 3y + 7z = 100$, a $x + 5y + 13z = 150$

Zadanie 5-(4p) Uzasadnij, że dla $a, b > 0$ nierówność $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ jest zawsze prawdziwa.

Zadanie 6-(4p) Oblicz długości boków równoległoboku, którego obwód jest równy 66, a stosunek wysokości jest równy $\frac{4}{7}$.

Zadanie 7-(4p) Oblicz $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Zadanie 8-(4p) Sześć rur o zewnętrznej średnicy 12 cm położono jak na rysunku. Oblicz wysokość stosu rur.



Zadanie 9-(5p) W trójkąt równoboczny wpisano kwadrat, w ten sposób, że 2 wierzchołki kwadratu leżą na podstawie trójkąta, a dwa pozostałe leżą na dwóch ramionach trójkąta. Oblicz stosunek pola trójkąta równobocznego do pola kwadratu wpisanego w ten trójkąt. Czy jest to liczba większa od 2?

Zadanie 10-(5p) Oznaczmy przez S środek ciężkości trójkąta ABC. (środek ciężkości trójkąta to punkt przecięcia się prostych łączących wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku). Uzasadnij, że trójkąty ABS, ACS, BCS mają równe pola.

Propozycja punktowania zadań dla klas I LO i I Technikum z podstawowym programem nauczania matematyki na etapie rejonowym Międzyszkolnych Zawodów Matematycznych (2010/2011).

Nr zadania	czynność	punkty
1	Oznaczenia: x- liczba orłów, y- liczba reszek i ułożenie równania $10x+7y=88$	1
	Zapisanie, że szukane rozwiązanie jest liczbą naturalną dodatnią	0,5
	Znalezienie jedyne rozwiązanie spełniającego warunki zadania: $x=6, y=4$ i odpowiedź 10 rzutów	0,5
2	Zapisanie ceny sukienki po obniżkach $x=50\%*75\%*80\%$ ceny początkowej lub obliczenie z proporcji : 25% z 50% to 12,5%, a 20% z 37,5 % to 7,5%	1
	Wyliczenie wyniku i podanie odpowiedzi: cenę obniżono o 70%	1
3	Obliczenie wieku Kasi (4 lata), Bartka (6 lat) i Adama (12 lat)	1
	Obliczenie, że za 4 lata Adam będzie 2 razy starszy od Kasi	1
	Obliczenie wieku Bartka za 4 lata – 10 lat	1
4	Odjęcie stronami danych równań i uzyskanie wyniku $2y+6z=50$	1
	Odjęcie stronami pierwszego z danych równań i równania $2y+6z=50$ oraz otrzymanie wyniku $x+y+z=50$	2
5	Przekształcenie nierówności do postaci $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ (lub obliczenie różnicy $\frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$)	2
	Skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia i uzasadnienie odpowiedzi	2
6	Wykonanie rysunku, oznaczenie boków np. a,b oraz wysokości np. 4x, 7x	1,5
	Wykorzystanie wzoru na pole równoległoboku do uzasadnienia, że $a/b=4/7$	1
	Wykorzystanie powyższej proporcji oraz wzoru na obwód równoległoboku do obliczenia długości boków 12, 21	1,5
7	Usunięcie niewymierności z mianowników do postaci $-\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \dots + \sqrt{99} - \sqrt{99} + \sqrt{100}$	2
	Zredukowanie wyrazów i obliczenie wyniku 9	2
8	Zauważenie, że środki okręgów wyznaczają trójkąt równoboczny o boku 24	2
	Obliczenie wysokości trójkąta z poprzedniego punktu $12\sqrt{3}$	1
	Obliczenie wysokości stosu $12\sqrt{3} + 12$	1
9	Wykonanie rysunku ze wszystkimi oznaczeniami, np. a - bok trójkąta, b – bok kwadratu	0,5
	Zapisanie proporcji z podobieństwa trójkątów $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} - b}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}$	1
	Znalezienie stosunku a/b z powyższej proporcji $\frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	1,5
	Obliczenie stosunku pól $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{12 + 7\sqrt{3}}{12}$ i sprawdzenie, że jest on większy od 2	2
10	Wykonanie rysunku ze wszystkimi oznaczeniami	1
	Oznaczenie np. D-środek boku BC i uzasadnienie, że trójkąty ADB i DCA mają równe pola	1
	Uzasadnienie, że trójkąty BDS i DCS mają równe pola oraz wykorzystanie 2 ostatnich faktów do stwierdzenia, że pola trójkątów ABS i SCA są równe	1
	Przeprowadzenie analogicznego rozumowania do stwierdzenia równości pól innej pary trójkątów np. ACS i SCB oraz uzasadnienie tezy	2

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.