

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II - zakres podstawowy
Etap rejonowy – 07.02.2004 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Uzasadnij, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej x , liczba $x^3 + 3x^2 - x - 3$ jest podzielna przez 48

Zadanie 2 (2 pkt)

Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich takie, że suma liczb w każdej parze jest równa 168, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 24.

Zadanie 3 (3 pkt)

W trapez prostokątny ABCD ($AB \perp AD$) został wpisany okrąg. Znajdź miarę kąta BOC gdzie punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trapez.

Zadanie 4 (3 pkt)

Narysuj wykres funkcji określonej wzorem:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x + 3}$$

Zadanie 5 (4 pkt)

Przekątna prostokąta dzieli kąt przy wierzchołku w stosunku 2:1.
Oblicz pole prostokąta, gdy obwód jest równy 24 cm.

Zadanie 6 (4 pkt)

Na płycie Diofantosa był taki napis:

"Przechodniu! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który umarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego życia był dzieckiem, przez dwunastą część młodzieńcem. Następnie upłynęła siódma część jego życia zanim się ożenił. W pięć lat po zawarciu związku małżeńskiego urodził mu się syn, który żył dwa razy krócej od niego. W cztery lata po śmierci swego syna Diofantos, opłakiwany przez najbliższych, zasnął snem wiecznym. Ile miał lat kiedy zmarł?"

Zadanie 7 (4 pkt)

W koło o polu $\frac{5}{4}\pi$ wpisano trójkąt prostokątny o polu 1. Oblicz obwód trójkąta

Zadanie 8 (4 pkt)

Wiadomo, że: $\frac{x+y}{x-2y} = \frac{2}{3}$. Wyznacz wartość wyrażenia $\frac{xy - y^2}{2x^2 + 2xy + 3y^2}$

Zadanie 9 (5 pkt)

W pewnej liczbie dwucyfrowej cyfra jedności stanowi $28\frac{4}{7}\%$ cyfry dziesiątek. Wyznacz tę liczbę, jeżeli wiadomo, że po przestawieniu cyfr tej liczby otrzymamy liczbę o 45 mniejszą od początkowej.

Zadanie 10 (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia prostych o równaniach:
 $mx + (2m - 1)y - 3m = 0$ i $x + my - m = 0$ należy do trójkąta o wierzchołkach $A = (0,0)$
 $B = (3,0)$, $C = (0,3)$?

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie sumy w postaci iloczynowej : $(x - 1)(x + 1)(x + 3)$	0,5
	Wstawienie w miejsce x wyrażenia $2k + 1$, gdzie $k \in N$ i dokonanie redukcji wyrazów podobnych	0,5
	Odpowiedź z uzasadnieniem	1
2	Zapisanie warunku zadania $24k_1 + 24k_2 = 168$, czyli $k_1 + k_2 = 7$, gdzie $k_1, k_2 \in N$	0,5
	Wypisanie par liczb (k_1, k_2) spełniających warunek	0,5
	Wypisanie par liczb spełniających warunek zadania: $(24,144), (48,120), (72,96), (96,72), (120,48), (144, 24)$	1
3	Rysunek	0,5
	Zapisanie sumy miar dwóch kątów w trójkącie BOC : $\left \frac{1}{2} \angle B \right + \left \frac{1}{2} \angle C \right = 90^\circ$,	1
	Zapisanie faktu, że środek okręgu wpisanego w trapez znajduje się na przecięciu dwusiecznych kątów	0,5
	Obliczenie miary kąta BOC, uwzględniając, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta równa się 180° .	1
4	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $D_f = R \setminus \{-3\}$	0,5
	Zapisanie przepisu funkcji w postaci $f(x) = \frac{\sqrt{(x+3)^2}}{x+3}$	0,5
	Zapisanie funkcji w postaci $f(x) = \frac{ x+3 }{x+3}$	1
	Zapisanie funkcji $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3, +\infty) \\ -1 & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \end{cases}$	0,5
	Wykonanie wykresu funkcji	0,5
5	Wyznaczenie miar kątów na które przekątna dzieli kąt prosty w prostokącie: 30° i 60°	1
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a + b = 12 \\ b = a \operatorname{tg} 30^\circ \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań	1,5
	Obliczenie pola prostokąta	0,5
6	Zapisanie równania : $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$, gdzie x to wiek Diofantosa	2,5
	Rozwiązanie równania ; $x = 84$	1
	Sprawdzenie czy obliczona liczba spełnia warunki zadania i odpowiedź	0,5
7	Obliczenie długości promienia koła : $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$	1
	Obliczenie długości przeciwprostokątnej	0,5
	Zapisanie układu równań : $0,5a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 5$, gdzie a, b to długości przyprostokątnych trójkąta	1
	Rozwiązanie układu równań	1
	Obliczenie obwodu prostokąta	0,5
8	Wyznaczenie jednej z niewiadomych z równania np. $x = -7y$	1
	Wstawienie do wyrażenia zamiast x wyrażenie $-7y$	2
	Dokonanie redukcji wyrazów podobnych i udzielenie odpowiedzi	1

9	Zapisanie liczby $10x + y$ gdzie x jest cyfrą dziesiątek a y jest cyfrą jedności	0,5
	Zapisanie pierwszego równania : $y = \frac{2}{7}x$	1
	Zapisanie liczby po przestawieniu cyfr: $10y + x$	0,5
	Zapisanie drugiego równania : $x - y = 5$	1
	Rozwiązanie układu równań	1
	Sprawdzenie, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania i udzielenie odpowiedzi	1
10	Znalezienie współrzędnych punktu przecięcia prostych: $x = \frac{m(m+1)}{(m-1)^2}$, $y = \frac{m(m-3)}{(m-1)^2}$ przy $m \neq 1$	1,5
	Zapisanie warunków, które powinny spełniać współrzędne punktu, aby on należał do trójkąta; $x \in [0,3]$ i $0 \leq y \leq -x + 3$	0,5
	Znalezienie m dla którego jest spełniony warunek : $x \in [0,3]$: $m \in (-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty)$	1,5
	Znalezienie m dla którego jest spełniony warunek: $0 \leq y \leq -x + 3$ $m \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$	1
	Znalezienie wspólnej części zbiorów : $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [3, +\infty)$	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.