

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO i II, III Technikum - zakres podstawowy
Etap rejonowy – 11.12.2004 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $3^{n+2} + 3^{n+1} + 3^n$ jest podzielna przez 13

Zadanie 2 (2 pkt)

Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-2}$$

Zadanie 3 (3 pkt)

W okrąg o promieniu długości 1 wpisano trójkąt równoboczny i kwadrat. Które pole jest większe, trójkąta czy kwadratu i ile razy?

Zadanie 4 (3 pkt)

Dla jakich cyfr m, n liczba której kolejnymi cyframi są 2,1,3, m ,5,4, n , i n jest cyfrą jedności jest podzielna przez 45.

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5 (4 pkt)

Dany jest prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm. Krótszy bok powiększono, a dłuższy pomniejszono o x . Dla jakiej wartości x pole otrzymanego prostokąta będzie największe. Oblicz to pole.

Zadanie 6 (4 pkt)

Proste przechodzące przez końce jednej z przekątnych prostokąta i prostopadłe do drugiej przekątnej, dzielą ją na trzy równe części. Wyznacz stosunek boków prostokąta.

Zadanie 7 (4 pkt)

Dwa boki trójkąta mają długości 1 i 3. Oblicz obwód i pole tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku jest liczbą naturalną.

Zadanie 8 (4 pkt)

Na zewnątrz trzech boków trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości b zbudowano kwadraty. Środki tych kwadratów połączono odcinkami. Oblicz pole otrzymanego trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

Kupiec ma dwie beczki wina. Stosunek liczby litrów wina z pierwszej do liczby litrów z drugiej beczki wynosi 3 : 2. Litr wina z pierwszej beczki kosztuje tyle złotych, ile wynosi 5% liczby litrów wina znajdującego się w drugiej beczce. Litr wina w drugiej beczce jest o 2 złote droższy od litra wina w pierwszej beczce. Łączna wartość wina w obu beczkach jest równa 960 złotych.

a) Ile litrów wina jest w każdej beczce?

b) Ile złotych kosztuje litr wina z każdej beczki ?

Zadanie 10 (5 pkt)

Sprawdź, czy liczba :

$$\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}) - \sqrt{2} \text{ jest liczbą wymierną.}$$

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II LO i II, III Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie sumy w postaci iloczynu $3^n(9 + 3 + 1)$	1,5
	Uzasadnienie, że dana liczba jest podzielna przez 13	0,5
2	Zapisanie układu nierówności : $2 - x \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$	1
	Rozwiązanie nierówności : $x \in \{2\}$	0,5
	Zapisanie dziedziny ; $D_f = \{2\}$	0,5
3	Rysunek wraz z oznaczeniami	0,5
	Obliczenie pola kwadratu : $P_1 = 2$	1
	Obliczenie pola trójkąta: $P_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$	1
	Obliczenie stosunku pól i udzielenie odpowiedzi : pole kwadratu jest $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ większe od pola trójkąta	0,5
4	Zauważenie, że liczba jest podzielna przez 45 jeżeli jest podzielna przez 5 i 9	0,5
	Wyznaczenie n dla której liczba jest podzielna przez 5 : $n = 0$ lub $n = 5$	0,5
	Wyznaczenie m przy uwzględnieniu, że liczba ma być podzielna przez 9 dla wyznaczonych n	1
	Udzielenie odpowiedzi: $n = 0$, $m = 3$ lub $n = 5$, $m = 7$	1
5	Analiza zadania	0,5
	Zapisanie pola prostokąta : $(3 + x)(4 - x)$	1
	Uzasadnienie, że funkcja przyjmuje wartość największą :	1
	Obliczenie x dla których pole jest największe : $\frac{1}{2}$	1
	Obliczenie pola: $12\frac{1}{4}$	0,5
6	Zapisanie układu równań : $x^2 + (\frac{1}{3}d)^2 = b^2$, $x^2 + (\frac{2}{3}d)^2 = a^2$, $a^2 + b^2 = d^2$, gdzie a, b to długości boków prostokąta ABCD, d długość przekątnej a x to długość wysokości trójkąta ABD poprowadzona z wierzchołka A,	1,5
	Rozwiązanie układu $a = \frac{\sqrt{6}}{3}d$, $b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$	1,5
	Obliczenie stosunku : $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$	1
7	Zapisanie układu warunków : $1+3 > x$, $1+x > 3$, $x+3 > 1$ i $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gdzie x jest długością trzeciego boku	1,5
	Wyznaczenie x : 3	1,5
	Obliczenie obwodu i pola trójkąta : 7, $\frac{\sqrt{35}}{4}$	1
8	Wykonanie rysunku z oznaczeniami	0,5
	Obliczenie długości jednego z boków trójkąta : $b\sqrt{2}$	1
	Obliczenie długości wysokości trójkąta prostopadłej do rozważanego boku : $b\sqrt{2}$	1,5
	Obliczenie pola trójkąta : $P = b^2$	1
9	Analiza zadania	0,5
	Zapisanie równania : $\frac{5}{100} \cdot \frac{2}{3}x^2 + (\frac{5}{100} \cdot \frac{2}{3}x + 2) \cdot \frac{2}{3}x = 960$, gdzie x jest liczbą litrów wina w pierwszej beczce	2

	Rozwiązanie równania : $x = 120$ litrów	1
	Obliczenie liczby litrów wina w drugiej beczce : 80 litrów	0,5
	Obliczenie ceny wina z pierwszej i drugiej beczki: 4 złote i 6 złotych	1
10	Wykonanie mnożenia różnicy przez $\sqrt{2}$	2
	Zapisanie wyrażenia w postaci : $\sqrt{(1+\sqrt{7})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{7})^2} - 2$	2
	Obliczenie wartości wyrażenia : 0	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.