

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO i II, III Technikum - zakres podstawowy
Etap rejonowy – 03.12.2005 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wykaż, że liczba $3^{32} - 1$ jest podzielna przez 8

Zadanie 2 (2 pkt)

Zamień ułamek dziesiętny 0,(34) na ułamek zwykły.

Zadanie 3 (3 pkt)

Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x - 2} + \sqrt{5}$$

Zadanie 4 (3 pkt)

Nie wyznaczając pierwiastków równania $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{16} = 0$ oblicz sumę ich odwrotności.

Zadanie 5 (4 pkt)

Sporządź wykres funkcji $f(x) = (1 - x)\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Określ liczbę rozwiązań równania $(1 - x)\sqrt{x^2 + 2x + 1} = m$ w zależności od wartości m .

Naszkicuj wykres funkcji $y = g(m)$ przyporządkowującej liczbie $m \in R$ liczbę rozwiązań danego równania.

Zadanie 6 (4 pkt)

Wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 5 i 7. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

Zadanie 7 (4 pkt)

Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2.

Zadanie 8 (4 pkt)

Środek okręgu wpisanego w trapez prostokątny znajduje się w odległości 3 cm i 4 cm od końców tego ramienia, które nie jest prostopadłe do podstaw. Oblicz pole trapezu.

Zadanie 9 (5 pkt)

Paweł mówi do Piotra: " Mam 3 razy więcej lat niż ty miałeś wtedy, kiedy ja miałem tyle lat, ile ty masz teraz. Kiedy osiągniesz mój wiek, będziemy mieli łącznie 112 lat" Ile lat ma Piotr?

Zadanie 10 (5 pkt)

W trójkąt prostokątny ABC, w którym długość przyprostokątnej AC jest równa 16 a długość przeciwprostokątnej AB jest równa 20 wpisano prostokąt, tak, że dwa boki zawierają się w przyprostokątnych a pozostały wierzchołek należy do przeciwprostokątnej. Podaj wymiary prostokąta o największym polu.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II LO i II, III Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie sumy w postaci iloczynu $(3^{16}+1)(3^8+1)(3^4+1)(3^2+1)(3^2-1)$	1,5
	Uzasadnienie, że liczba jest podzielna przez 8	0,5
2	Zapisanie ułamka w postaci $0,34343434\dots$ i oznaczenie np. literką x	0,5
	Zapisanie wyrażenia $100x$; $100x = 34,343434\dots$	0,5
	Zapisanie równania : $100x = 34 + x$	0,5
	Obliczenie x: $x = \frac{34}{99}$	0,5
3	Określenie warunków w celu wyznaczenia dziedziny funkcji : $4 - x^2 \geq 0$ i $x - 2 \geq 0$	1
	Wyznaczenie dziedziny : $D_f = \{2\}$	1
	Obliczenie wartości funkcji dla $x = 2$	0,5
	Określenie przeciwdziedziny: $\{\sqrt{5}\}$	0,5
4	Sprawdzenie, czy delta jest nieujemna ; $\Delta = \frac{1}{12}$	0,5
	Zapisanie sumy odwrotności pierwiastków równania w postaci ułamka : $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$	1
	Obliczenie sumy i iloczynu pierwiastków równania korzystając ze wzorów Vietea; $x_1 + x_2 = \frac{9}{4}$ $x_1 x_2 = \frac{39}{32}$	1
	Obliczenie sumy odwrotności pierwiastków równania: $1\frac{11}{13}$	0,5
5	Zapisanie przepisu funkcji w postaci : $f(x) = (1 - x) x + 1 $	0,5
	Zapisanie przepisu funkcji w postaci : $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \geq -1 \\ x^2 - 1 & \text{dla } x < -1 \end{cases}$	0,5
	Sporządzenie wykresu funkcji	1,5
	Określenie liczby rozwiązań równania $(1 - x)\sqrt{x^2 + 2x + 1} = m$ w zależności od wartości m: $g(m) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \\ 2 & \text{dla } m \in \{1, 0\} \\ 3 & \text{dla } m \in (0, 1) \end{cases}$	1
	Sporządzenie wykresu funkcji $y = g(m)$	0,5
6	Zapisanie układu trzech równań z trzema niewiadomymi: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 144 \\ h^2 + 25 = a^2 \\ h^2 + 49 = b^2 \end{cases}$	1,5
	Rozwiązanie układu równań : $a = 2\sqrt{15}, b = 2\sqrt{21}, h = \sqrt{35}$	1,5
	Obliczenie pola trójkąta : $P = 6\sqrt{35}$	0,5
	Obliczenie obwodu trójkąta: $Obwód = 2\sqrt{15} + 2\sqrt{21} + 12 = 2(\sqrt{15} + \sqrt{21} + 6)$	0,5
7	Analiza zadania : zapisanie kolejnych liczb całkowitych w postaci np. x, x+1, x+2	0,5
	Zapisanie sumy kwadratów tych liczb w postaciach : $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3x^2 + 6x + 5$	1
	Zapisanie ilorazu sumy przez 3 w następującej postaci : $\frac{3x^2 + 6x + 5}{3} = x^2 + 2x + \frac{5}{3}$	1,5
	Uzasadnienie, że wyrażenie $x^2 + 2x$ jest liczbą całkowitą a 5 po podzieleniu przez 3 daje iloraz równy 1 i resztę 2	1

8	Rysunek wraz z oznaczeniami ; np. długości podstaw a, b , długość wysokości h , a miary kątów pomiędzy ramieniem nie prostopadłym do podstaw a podstawami odpowiednio α i β .	0,5
	Uzasadnienie, że trójkąt o bokach długości 3 cm i 4 cm jest trójkątem prostokątnym	0,5
	Obliczenie długości ramienia nie prostopadłego do podstaw; $c=5$	0,5
	Obliczenie długości promienia okręgu z równania $\frac{1}{2} \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r$; $r = 2\frac{2}{5}$	1
	Obliczenie długości wysokości trapezu; $h = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$	0,5
	Obliczenie sumy długości podstaw trapezu, korzystając z własności czworokątów, w których jest wpisany okrąg ; $a + b = 9\frac{4}{5}$	0,5
	Obliczenie pola trapezu; $P = 23\frac{13}{25}$	0,5
9	Analiza zadania ; y - wiek Piotra obecnie, x - wiek Pawła obecnie, $y - (x - y)$ - wiek Piotra przed laty, y - wiek Pawła przed laty x - wiek Piotra w przyszłości, $x + (x - y)$ wiek Pawła w przyszłości, gdzie y jest stałą różnicą między wiekiem Pawła i Piotra	1,5
	Zapisanie układu równań; $\begin{cases} x = 3[y - (x - y)] \\ x + (x - y) + x = 112 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań; $x=48, y=32$	1
	Sprawdzenie czy wyznaczone liczby spełniają warunki zadania	1
	Udzielenie odpowiedzi. : Piotr ma 32 lata a Paweł 48 lat	0,5
10	Rysunek wraz z oznaczeniami	0,5
	Obliczenie długości przyprostokątnej BC; $ BC =12$	0,5
	Uzasadnienie, że trójkąty ABC, AKM (gdzie K,C,L,M to kolejne wierzchołki prostokąta) są podobne	1
	Zapisanie proporcji ; $\frac{12}{16} = \frac{y}{16-x}$ gdzie x, y to długości boków prostokąta	1
	Zapisanie pola prostokąta jako funkcji na przykład zmiennej x ; $P = x(12 - \frac{3}{4}x)$	1
	Uzasadnienie, że funkcja posiada maksimum	0,5
	Obliczenie długości boków prostokąta dla których jego pole jest największe	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.