Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO, II, III Technikum - zakres podstawowy
Etap rejonowy – 02.12.2006 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)
Liczba naturalna *a* przy dzieleniu przez *4* daje resztę *3*, zaś przy dzieleniu przez *5* daje resztę *2*. Jaką resztę otrzymamy z dzielenia liczby *a* przez *20*.

Zadanie 2 (2 pkt)
Wyznacz największy możliwy zbiór w którym funkcja $f(x)=|x+1|+|x-1|$ jest stała.

Zadanie 3 (3 pkt)
Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości *1, 2, 3*?

Zadanie 4 (3 pkt)
Wyznacz zbiór wartości funkcji : $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x-3}+2\sqrt{3}$.

Zadanie 5 (4 pkt)
W trójkącie ABC dwusieczne *BP* i *CT* przecinają się w punkcie *O* (punkty *P, T* należą do boków trójkąta). Wiadomo, że punkty *A,P,O,T* leżą na jednym okręgu. Znajdź miarę kąta przy wierzchołku *A* tego trójkąta.

Zadanie 6 (4 pkt)
Wewnątrz trapezu *ABCD* (gdzie *A,B,C,D* to kolejne wierzchołki trapezu) wybrano punkt *X*, który leży na odcinku łączącym środki ramion trapezu.
Sprawdź czy $P_{\Delta AXB}+P_{\Delta CXD}=P_{\Delta BXC}+P_{\Delta DXA}$

Zadanie 7 (4 pkt)
W trójkąt równoboczny o boku długości *a* wpisano koło *K*. Oblicz pole koła stycznego zewnętrznie do koła *K* i do dwóch boków trójkąta.

Zadanie 8 (4 pkt)
Oblicz bez użycia kalkulatora wartość wyrażenia: $\sqrt{17^3+17\cdot 16-2^{12}}$ wykorzystując między innymi wzór $\left(a^3-b^3\right)=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Zadanie 9 (5 pkt)
Suma długości ramion trapezu równoramiennego stanowi $\frac{1}{3}$ sumy długości jego podstaw, a stosunek długości podstaw jest równy $\frac{7}{5}$. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

Zadanie 10 (5 pkt)
W trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne mają długości 6 cm i 8 cm, wpisano prostokąt w taki sposób, że dwa boki prostokąta są zawarte w przyprostokątnych, a jeden z wierzchołków leży na przeciwprostokątnej.
Jakie wymiary powinien mieć ten prostokąt, aby jego pole było możliwie największe?

Życzymy powodzenia!

Kryteria oceniania dla klasy II LO i II, III Technikum– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Analiza zadania: $a=4l+3,\ b=5k+2.\ l,k\in C$	0,5
	Zapisanie równań w postaci: $5a=20l+15,\ 4a=20k+8$	0,5
	Zapisanie równania „po odjęciu stronami”: $a=20(l-k)+7$ i udzielenie odpowiedzi: reszta z dzielenia jest równa 7.	1
2	Zapisanie przepisu funkcji w postaci: $f(x)=\begin{cases}-2x\ dla\ x\in(-\infty,-1)\\ 2\ dla\ x\in[-1,1)\\ 2x\ dla\ x\in[1,+\infty)\end{cases}$	1,5
	Udzielenie odpowiedzi: funkcja jest stała w przedziale $[-1,1]$	0,5
3	Analiza zadania: a, b, c długości boków trójkąta, $h_a=1$, $h_b=2$, $h_c=3$ długości wysokości trójkąta poprowadzone prostopadle odpowiednio do boku a, b, c.	0,5
	Zapisanie pola trójkąta na trzy różne sposoby: $P=\frac{1}{2}a,\ P=b,\ P=\frac{3}{2}c$	1
	Zapisanie długości boków trójkąta na przykład przy pomocy b: $a=2b,\ c=\frac{2}{3}b$	0,5
	Sprawdzenie, czy tak zapisane długości boków trójkąta spełniają warunek trójkąta i udzielenie odpowiedzi: Nie istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości równe 1, 2, 3 bo $(b+c)$ nie jest większe od a	1
4	Wyznaczenie dziedziny funkcji na podstawie koniunkcji następujących warunków: $9-x^2\geq 0 \quad i \quad x-3\geq 0$: $D_f=\{3\}$	1,5
	Obliczenie $f(3)$: $f(3)=2\sqrt{3}$ i udzielenie odpowiedzi „Zbiór wartości funkcji to zbiór jednoelementowy $\{2\sqrt{3}\}$”	1,5
5	Rysunek wraz z oznaczeniami: np. miara kąta BAC równa się α	0,5
	Zauważenie, że miara kąta POT wynosi $\pi-\alpha$ na podstawie twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie.	1
	Zapisanie sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta BOC: $\frac{\beta}{2}+(\pi-\alpha)+\frac{\gamma}{2}=\pi$, gdzie $\lvert\angle ABC\rvert=\beta \quad \lvert\angle BCA\rvert=\gamma$	1,5
	Przekształcenie równania do postaci $(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha=0 \quad czyli \quad \pi-3\alpha=0$	0,5
	Obliczenie $\alpha:\alpha=\frac{\pi}{3}$ ($\alpha=60^0$)	0,5
6	Rysunek wraz z oznaczeniami, np. a, b długość odpowiednio podstawy dolnej i górnej.	0,5
	Zauważenie i uzasadnienie, że punkt X jest środkiem wysokości trapezu	1,5
	Obliczenie sumy pól trójkątów *AXB i CXD* i zauważenie, że jest ona równa połowie pola trapezu	1
	Zauważenie, że suma pól pozostałych trójkątów *AXD i BXC* jest równa połowie pola trapezu.	1
7	Rysunek wraz z oznaczeniami, np. a – długość boku trójkąta, R – długość promienia koła wpisanego w trójkąt, r- długość promienia koła stycznego zewnętrznie do koła K i boków trójkąta	1
	Zapisanie równania w celu znalezienia związku pomiędzy długościami promieni kół:	1

	$\frac{R-r}{R+r}=\sin 30^0$	
	Wyznaczenie związku: $r=\frac{1}{3}R$	0,5
	Zapisanie R za pomocą a: $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$	0,5
	Zapisanie r za pomocą a : $r=\frac{a\sqrt{3}}{18}$	0,5
	Obliczenie pola koła: $\frac{\pi a^2}{108}$	0,5
8	Zapisanie wyrażenia w postaci: $\sqrt{17^3-\left(2^4\right)^3+17\cdot 16}$	1,5
	Zapisanie wyrażenia w postaci: $\sqrt{(17-16)\left(17^2+16\cdot 17+16^2\right)+17\cdot 16}$	1,5
	Zapisanie wyrażenia w postaci: $\sqrt{(17+16)^2}$	0,5
	Obliczenie wartości wyrażenia: 33	0,5
9	Rysunek wraz z oznaczeniami: np. a długość podstawy dolnej, b długość podstawy górnej, α miara kąta przy podstawie dolnej, β miara kąta przy podstawie górnej	0,5
	Zapisanie zależności : $2c=\frac{1}{3}(a+b)$, $\frac{a}{b}=\frac{7}{5}$	1
	Zapisanie a i c przy pomocy b: $c=\frac{2}{5}b$, $a=\frac{7}{5}b$	1,5
	Obliczenie $\cos\alpha$: $\cos\alpha=\frac{a-b}{2c}=\frac{1}{2}$	1
	Obliczenie α : $\alpha=\frac{\pi}{3}$, ($\alpha=60^0$)	0,5
	Obliczenie β : $\beta=\frac{2}{3}\pi$, ($\beta=120^0$)	0,5
10	Rysunek wraz z oznaczeniami: np.: $\lvert AC\rvert=6cm, \lvert CB\rvert=8cm, \lvert DE\rvert=x, \lvert GE\rvert=y$ gdzie x, y to wymiary prostokąta *CDEG*, którego wierzchołki *D, G* należą do przyprostokątnych a wierzchołek *E* do przeciwprostokątnej	0,5
	Uzasadnienie, że trójkąty *ABC i BDE* są podobne	1
	Zapisanie równości $\frac{x}{8-y}=\frac{6}{8}$ czyli $x=6-\frac{3}{4}y$	1
	Zapisanie pola prostokąta w postaci : $P(y)=y\left(6-\frac{3}{4}y\right)$, $0<y<8$	1
	Wyznaczenie y dla którego wartość funkcji jest największa: y=4 i sprawdzenie czy wyznaczona wartość spełnia założenie.	1
	Podanie wymiarów prostokąta o największym polu: 3 cm, 4 cm	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.
Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.
Można przyznawać połówki punktów