

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO, II, III Technikum - zakres podstawowy
Etap II – 15.12.2007 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Liczby dodatnie a, b, c, d są takie, że pierwiastek trzeciego stopnia z $a \cdot b \cdot c$ równa się 4, a pierwiastek czwartego stopnia z $a \cdot b \cdot c \cdot d$ wynosi $2\sqrt{10}$. Oblicz wartość liczby d .

Zadanie 2 (2 pkt)

Pan Jakub zauważył, że iloczyn jego wieku i sumy lat jego trójki dzieci jest równy liczbie 128. Wiek każdego dziecka jest liczbą naturalną, a wiek ojca jest liczbą naturalną, o sumie cyfr równej 5. Oblicz wiek pana Jakuba i jego dzieci.

Zadanie 3 (3 pkt)

Proste o równaniach $y = ax + b$ i $y = bx + a + 1$ przecinają się w punkcie $A(2,3)$. Wyznacz punkty przecięcia się tych prostych z osią x .

Zadanie 4 (3 pkt)

Siedemnastu szachistów należy podzielić na dwie drużyny tak aby każdy zawodnik z pierwszej drużyny rozegrał mecz z każdym zawodnikiem drugiej drużyny. Jak dokonać podziału, aby liczba wszystkich meczów była jak największa?

Zadanie 5 (4 pkt)

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości 10 cm i 20 cm. Na krótszej przyprostokątnej jako na średnicy zbudowano okrąg. Oblicz długości odcinków, na które ten okrąg podzielił przeciwprostokątną.

Zadanie 6 (4 pkt)

Dany jest trójkąt ABC w którym $|AC| = |BC|$. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C , punkt E jest środkiem boku BC a $|CD| = |DE|$.

Udowodnij, że trójkąt CDE jest równoboczny.

Zadanie 7 (4 pkt)

Funkcja f określona jest w zbiorze wszystkich liczb całkowitych i przyporządkowuje każdej liczbie całkowitej resztę z dzielenia tej liczby przez 7.

- oblicz $f(-124)$ oraz $f(90)$
- opisz wzorem wszystkie miejsca zerowe tej funkcji
- Czy dla każdego $x \in \mathbb{Z}$ prawdziwa jest równość $f(x) = f(x+7)$.

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8 (4 pkt)

Na zewnątrz trzech boków trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości b zbudowano kwadraty. Środki tych kwadratów połączono odcinkami. Oblicz pole otrzymanego trójkąta KLM , gdzie K, L, M są środkami kwadratów zbudowanych odpowiednio na bokach AC, BC i AB .

Zadanie 9 (5 pkt)

Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $y = -x^2 + 5x - 3$ dla $x \in [-3, 0]$

Dla jakich argumentów funkcja osiąga w tym przedziale średnią arytmetyczną największej i najmniejszej wartości?

Zadanie 10 (5 pkt)

Janek postanowił kupić rower górski. W chwili podjęcia decyzji miał 500 złotych oszczędności, kwotę niewystarczającą do zakupu wymarzonego roweru. Postanowił więc odkładać swoje comiesięczne kieszonkowe w kwocie 50 złotych, ale cena roweru wzrastała co miesiąc o 20 złotych. Gdyby cena roweru nie zmieniła się to Janek uzbierałby na niego pieniądze o 4 miesiące wcześniej. Jaka była początkowa cena roweru i po ilu miesiącach Janek uzbierał potrzebną kwotę?

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II LO, II,III Technikum– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie równań: $\sqrt[3]{abc} = 4$ i $\sqrt[4]{abcd} = 2\sqrt{10}$	0,5
	Zapisanie równań w postaci: $abc = 64$ i $abcd = 1600$	1
	Obliczenie d i udzielenie odpowiedzi: $d = 25$	0,5
2	Wypisanie liczb dwucyfrowych, których suma cyfr wynosi 5: 14, 23, 32, 41, 50	0,5
	Dokonanie wyboru liczby przez którą jest podzielna liczba 128: to jest liczba 32	0,5
	Obliczenie sumy lat dzieci pana Jakuba: 4	0,5
	Podanie wieku pana Jakuba i jego dzieci: Pan Jakub ma 32 lata a jego dzieci 1 rok, 1 rok i 2 lata	0,5
3	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 2b + a + 1 = 3 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}$	0,5
	Zapisanie równań prostych: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$	0,5
	Wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia się prostych z osią x: $\left(-\frac{1}{4}, 0\right), (-7, 0)$	1
4	Analiza zadania: x - liczba szachistów I drużyny, $17-x$ - liczba szachistów II drużyny, gdzie $x \in N_+$ i $x < 17$	0,5
	Zapisanie funkcji przedstawiającej zależność pomiędzy liczbą meczów a liczbą szachistów I drużyny: $f(x) = x(17 - x)$ lub $f(x) = -x^2 + 17x$	1
	Wyznaczenie x dla którego funkcja przyjmuje wartość maksymalną: $x = 8,5$	0,5
	Podanie wartości x dla których są spełnione warunki zadania: $x = 8$ lub $x = 9$	0,5
	Udzielenie odpowiedzi: W jednej drużynie powinno być ośmiu szachistów a w drugiej dziewięciu szachistów.	0,5
5	Rysunek wraz z oznaczeniami: $ AC = 10, BC = 20$	0,5
	Obliczenie długości przeciwprostokątnej korzystając z Twierdzenia Pitagorasa: $ AB = 10\sqrt{5} \text{ cm.}$	0,5
	Zauważenie, że odcinek CD , gdzie D jest punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej jest wysokością trójkąta ABC .	0,5
	Obliczenie długości wysokości CD z równania: $\frac{1}{2} CD \cdot AB = \frac{1}{2} BC \cdot AC $: $ CD = 4\sqrt{5}$	1
	Obliczenie z trójkąta prostokątnego CBD długości odcinka BD : $ BD = 8\sqrt{5}$	1
	Obliczenie długości odcinka AD : $ AD = 2\sqrt{5}$	0,5
6	Zauważenie na podstawie Twierdzenia odwrotnego do Twierdzenia Talesa i na podstawie Twierdzenia Talesa, że $DE \parallel AC$ i $ DE = \frac{1}{2} AC $ czyli $ DE = \frac{1}{2} BC $	2
	Zapisanie, że $ DE = CE $ ponieważ te długości stanowią $\frac{1}{2} BC $	1

	Wykazanie na podstawie warunków zadania i prawa przechodniości, że $ CD = DE = CE $ i tym samym, że trójkąt CDE jest równoboczny	1
7	Obliczenie $f(-124)$ oraz $f(90)$: $f(-124)=5$, $f(90)=6$	1
	Opisanie miejsc zerowych: $x_0 = 7k$ gdzie $k \in C$	2
	Udzielenie odpowiedzi: równość jest prawdziwa dla każdego x , ponieważ reszta przy dzieleniu liczby x i $x+7$ przez 7 jest taka sama, ponieważ $x = 7k + r$, a $x+7 = 7k + r + 7 = 7(k+1) + r$	1
8	Wykonanie rysunku z oznaczeniami	0,5
	Obliczenie długości podstawy trójkąta : $ AB = b\sqrt{2}$	1
	Obliczenie wysokości trójkąta : $h = b\sqrt{2}$	1,5
	Obliczenie pola trójkąta : $P = b^2$	1
9	Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{5}{2}$	1
	Obliczenie wartości funkcji na końcach przedziału: $f(-3) = -27$, $f(0) = -3$	1
	Naszkicowanie wykresu funkcji lub powołanie się na monotoniczność funkcji i podanie największej i najmniejszej wartości funkcji: -3, -27	0,5
	Obliczenie średniej arytmetycznej najmniejszej i największej wartości : -15	0,5
	Zapisanie równania: $-x^2 + 5x - 3 = -15$	0,5
	Rozwiązanie równania : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$, $x_2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{2}$	1
	Udzielenie odpowiedzi: funkcja przyjmuje średnią arytmetyczną największej i najmniejszej wartości dla argumentu $x = \frac{5 - \sqrt{73}}{2}$	0,5
10	Analiza zadania: x – cena początkowa roweru górskiego, n – liczba miesięcy potrzebnych do uzbierania kwoty na zakup roweru gdyby cena roweru nie uległa zmianie	1
	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} x = 500 + n \cdot 50 \\ x + (n + 4) \cdot 20 = 500 + (n + 4) \cdot 50 \end{cases}$	1,5
	Rozwiązanie układu : $n = 6$, $x = 800$	1,5
	Sprawdzenie czy wyznaczone liczby spełniają warunki zadania i udzielenie odpowiedzi: cena początkowa roweru była 800 złotych a Janek musiał oszczędzać przez 6 miesięcy odkładając po 50 złotych	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.

