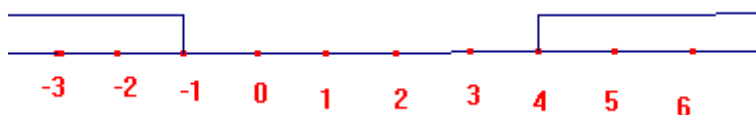


Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Poziom II – zakres podstawowy
Etap rejonowy – 13.12.2008 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Na osi liczbowej przedstawiono zbiór rozwiązań nierówności $|x+a| > b$



a) które liczby pierwsze nie spełniają tej nierówności, b) wyznacz a , b .

Zadanie 2 (2 pkt)

Określ dziedzinę funkcji : $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-2}$

Zadanie 3 (3 pkt)

Pewna liczba przy dzieleniu przez siedem daje resztę 6. Jaką resztę otrzymamy przy dzieleniu kwadratu tej liczby przez siedem?

Zadanie 4 (3 pkt)

Znajdź wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, które wzrastają 9 razy gdy między cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności wstawimy cyfrę zero.

Zadanie 5 (4 pkt)

W równoległoboku stosunek długości boków jest równy 2. Środek dłuższego boku połączono odcinkami z przeciwległymi wierzchołkami. Oblicz kąt pomiędzy poprowadzonymi odcinkami.

Zadanie 6 (4 pkt)

Promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym jest 2,5 razy większy od promienia koła wpisanego w ten trójkąt. Wyznacz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 7 (4 pkt)

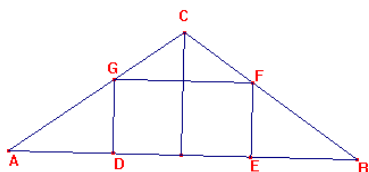
Boki trójkąta mają długości a , b , c , gdzie $a \leq b \leq c$. Wykaż, że wysokość opuszczona na bok o długości c dzieli go na dwa odcinki, z których jeden ma długość $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$

Zadanie 8 (4 pkt)

Właściciel firmy zakupił w hurtowni towar I gatunku za kwotę 2100 złotych i II gatunku za 810 złotych. Cena towaru I gatunku była o 10 złotych wyższa niż cena towaru II gatunku oraz towaru I gatunku było o 30 kg więcej niż towaru II gatunku. Ile kilogramów towaru każdego gatunku i po jakiej cenie kupił właściciel firmy?

Zadanie 9 (5 pkt)

Ściana szczytowa domu jest trójkątem równoramiennym o podstawie 16 metrów i wysokości 6 metrów. Na tej ścianie ma być umieszczony plakat reklamowy w kształcie prostokąta wpisanego w ten trójkąt w taki sposób, że jeden bok prostokąta jest zawarty w podstawie trójkąta, a wierzchołki pozostałych boków należą do ramion trójkąta. Oblicz jak należy dobrać wymiary prostokąta aby powierzchnia plakatu była największa.



Zadanie 10 (5 pkt)

Rozwiąż nierówność : ~~$(2-3a)(2-3a) > 0$~~ . Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla poziomu II zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Liczba pkt
1	Odczytanie z rysunku, które liczby pierwsze nie spełniają nierówności: 2, 3	0,5
	Odczytanie zbioru rozwiązań nierówności z rysunku: $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ i określenie położenia liczby równoodległej od krańców przedziałów.	0,5
	Podanie wartości a i b : $a = -\frac{3}{2}, b = 2\frac{1}{2}$	1
2	Zapisanie warunków: $2 \leq x \leq 2$	0,5
	Rozwiązanie układu nierówności: $x \in [2, 2], x \in (-\infty, 3] \cup [2, \infty)$	1
	Podanie dziedziny: $D_f = \{-2, 2\}$	0,5
3	Zapisanie liczby a w postaci: $a = 7k + 6k \in$	0,5
	Zapisanie kwadratu liczby a : $a^2 \in [49, 36] \cup [36, 49]$	1
	Zapisanie kwadratu liczby a w postaci: $a^2 = (7k + 6k)^2$ i udzielenie odpowiedzi: reszta wynosi 1	1,5
4	Analiza zadania x – cyfra dziesiątek, y – cyfra jedności i zapisanie liczby dwucyfrowej $10x + y$ i zapisanie liczby po wstawieniu zera $100x + y$	1
	Zapisanie równania: $9(10x + y) = 100x + y$ i zapisanie założenia $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	1
	Wyznaczenie zależności pomiędzy y i x : $y = \frac{5}{4}x$ i dokonanie wyboru pary (x, y) spełniającej warunki zadania i udzielenie odpowiedzi: szukaną liczbą jest liczba 45	1
5	Zauważenie, że trójkąty ASD i SBC są równoramienne, gdzie S jest środkiem boku CD i stwierdzenie że suma miar kątów sąsiednich równoległoboku jest równa 180°	1
	Zapisanie miar kątów równoległoboku $\angle A = \angle B, \angle D = \angle C$, gdzie α, β są miarami kątów ostrych w podanych trójkątach równoramiennych.	1
	Zapisanie zależności: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$	1
	Zapisanie równania: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ i udzielenie odpowiedzi $\gamma = 90^\circ$	1
6	Analiza zadania, rysunek wraz z oznaczeniami: a, b długości przyprostokątnych ($b \geq a$), R długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.	0,5
	Zapisanie związków pomiędzy wielkościami: $R_2^5 \in (a, b) \cup (b, a)$	1
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2R^2 \\ a + b = r \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $a = 3, b = 4$	1
	Obliczenie cosinusów kątów ostrych trójkąta: $\cos \frac{\beta}{2} = \frac{3}{5}, \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$	0,5
7	Rysunek wraz z oznaczeniami:	1

		
	Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC: $H^2 + x^2 = B^2$	0,5
	Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC: $H^2 + (c-x)^2 = a^2$	0,5
	Zapisanie równania: $B^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$	1
	Zapisanie x i c - x: $x = \frac{B^2 - a^2 + c^2}{2c}$	1
8	Analiza zadania: x – cena towaru w II gatunku, y – liczba kilogramów towaru II gatunku, x+10 – cena towaru w I gatunku, y+ 30 – liczba kilogramów towaru w I gatunku	0,5
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} xy = 810 \\ (x+10)(y+30) = 2540 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} x = 15 \\ y = 54 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$	2
	Sprawdzenie czy rozwiązanie układu równań spełnia warunki zadania Udzielenie odpowiedzi : Właściciel firmy zakupił 54 kilogramy towaru II gatunku po cenie 15 złotych i 84 kilogramy towaru I gatunku po cenie 25 złotych lub zakupił 45 kilogramów towaru II gatunku po cenie 18 złotych i 75 kilogramów towaru I gatunku po cenie 28 złotych	0,5
9	Analiza zadania: x - długość odcinka DE, y – długość odcinka EF	0,5
	Zauważenie i uzasadnienie, że trójkąty EBF i BCH są podobne gdzie H jest punktem wspólnym wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C i odcinka AB	0,5
	Zapisanie zależności : $\frac{y}{6} = \frac{8 - \frac{x}{2}}{8}$	1
	Zapisanie zależności w postaci : $y = \frac{48-3x}{8}$	0,5
	Zapisanie pola prostokąta w postaci $P(x) = x \left(\frac{48-3x}{8} \right)$ i ustalenie dziedziny $D_p = (0; 16)$	1
	Wyznaczenie wartości x dla której funkcja przyjmuje wartość największą i sprawdzenie czy liczba należy do dziedziny funkcji : $x = 8$ i $x \in D_p$	1
	Obliczenie y : $y = 3$ i udzielenie odpowiedzi: wymiary prostokąta o największym polu są $x = 8$ i $y = 3$	0,5
10	Sprowadzenie nierówności do nierówności stopnia drugiego poprzez wprowadzenie pomocniczej zmiennej np. : $t = 2x^2 - 3x$ i zapisanie nierówności w postaci : $(t-8)(t-6) \leq 0$	1
	Rozwiązanie nierówności z niewiadomą t : $t \in [5, 9]$	1
	Rozwiązanie układu nierówności : $\begin{cases} 2x^2 - 3x \leq 9 \\ 2x^2 - 3x \geq 5 \end{cases}$	2,5
	Udzielenie odpowiedzi $x \in \left[\frac{5}{2}, 10 \right] \cup \left[\frac{11}{2}, 25 \right]$	0,5