

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa IV LO i IV, V technikum - profil ogólny
Etap rejonowy – 07.02.2004 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$2^x \geq 3^x$$

Zadanie 2 (2 pkt)

Rozwiąż równanie

$$\left[\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \right]^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} \right)^2 x^2 - 12x + \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{-4}{3}} \sqrt[3]{32} = 0$$

Zadanie 3 (3 pkt)

Zaznacz zbiór punktów płaszczyzny dla których prawdziwa jest nierówność:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+y) > 1$$

Zadanie 4 (3 pkt)

Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ liczby $1, \sqrt{2} \sin x, \cos 2x$ są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

Zadanie 5 (4 pkt)

Wyznacz przepis funkcji f oraz określ jej dziedzinę, wiedząc, że suma zapisana po prawej stronie znaku równości jest sumą szeregu geometrycznego zbieżnego

$$f(x) = x - 3 + \frac{2x - 6}{x + 2} + \frac{4x - 12}{(x + 2)^2} + \dots + \frac{2^{n-1}(x - 3)}{(x + 2)^{n-1}} + \dots$$

Zadanie 6 (4 pkt)

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb, w którym kąt ostry ma miarę α . Krótsza przekątna graniastosłupa ma długość d i tworzy ze ścianą boczną kąt o mierze β .

Oblicz długość wysokości graniastosłupa.

Zadanie 7 (4 pkt)

Narysuj wykres funkcji określonej wzorem

$$g(x) = \left| \frac{1}{1 - |x|} + 1 \right|$$

Zadanie 8 (4 pkt)

Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 4 cm a odległość środka ramienia od przeciwległego wierzchołka podstawy wynosi 3 cm. Oblicz długość podstawy trójkąta.

Zadanie 9 (5 pkt)

W trójkącie ABC iloczyn skalarny wektorów $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ jest równy 20, długość boku BC równa się 7 a suma długości pozostałych boków 13.

Oblicz miarę kąta BAC oraz pole trójkąta.

Zadanie 10 (5 pkt)

Dane są dwa wierzchołki trójkąta : A (2,1), B (3, -2). Wyznacz współrzędne trzeciego wierzchołka C wiedząc, że środek ciężkości trójkąta (punkt przecięcia środkowych trójkąta) leży na osi Ox, a pole tego trójkąta jest równe 3 cm^2 .

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy I V, V– profil ogólny

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie nierówności w postaci $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^0$	1
	Podanie rozwiązania nierówności $x \in (-\infty, 0]$	1
2	Obliczenie a; $a = 4$	0,5
	Obliczenie c ; $c = 8$	0,5
	Rozwiązanie równania ; $x_1 = 1, x_2 = 2$	1
3	Zapisanie koniunkcji warunków; $x + y > 0$ i $x + y < \frac{1}{2}$	1,5
	Zaznaczenie w układzie współrzędnych	1,5
4	Zapisanie warunku wynikającego z własności ciągu geometrycznego; $(\sqrt{2} \sin x)^2 = \cos 2x$	1
	Zapisanie równania po zastosowaniu jedynki trygonometrycznej i redukcji wyrazów podobnych; $4\sin^2 x = 1$	1
	Zapisanie równania w postaci alternatywy równań ; $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$	0,5
	Zapisanie rozwiązań równań; $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$	0,5
5	Wyznaczenie a_1 i q szeregu geometrycznego; $a_1 = x - 3, q = \frac{2}{x+2}$	0,5
	Zapisanie warunku na dziedzinę funkcji w postaci koniunkcji nierówności; $-1 < \frac{2}{x+2} < 1$	0,5
	Rozwiązanie tej koniunkcji nierówności ; $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$	2
	Zapisanie przepisu funkcji; $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x}$ dla $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$	1
6	Wykonanie rysunku wraz z oznaczeniami	0,5
	Obliczenie dwoma sposobami długości x wysokości rombu; $x = a \sin \alpha, x = d \sin \beta$, gdzie a jest długością krawędzi podstawy	1
	Wyznaczenie $a, a = \frac{d \sin \beta}{\sin \alpha}$	0,5
	Wyznaczenie długości krótszej przekątnej rombu; $d_1 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$	1
	Wyznaczenie długości wysokości graniastosłupa, korzystając z twierdzenia Pitagorasa ; $H = \frac{d}{\sin \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$	1
7	Zapisanie pomocniczej funkcji $f(x) = \frac{1}{1- x } + 1$ w postaci $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{1}{1+x} + 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$	1

	Wykonanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{1- x } + 1$	2
	Wykonanie wykresu funkcji $g(x) = \left \frac{1}{1- x } + 1 \right $	1
8	Rysunek	1
	Obliczenie cosinusa kąta przy wierzchołku C korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ASC gdzie S jest środkiem boku BC: $\cos \angle C = \frac{11}{16}$	1,5
	Obliczenie długości podstawy trójkąta korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC ; $a = \sqrt{10}$	1,5
9	Zapisanie układu równań korzystając z definicji iloczynu skalarnego i twierdzenia cosinusów: $c \cdot b \cos \alpha = 20$ $c + b = 13$ $c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha = 49$ gdzie $b = AC $, $c = AB $ a α to kąt pomiędzy b i c	2
	Rozwiązanie układu równań ; ($b = 8$, $c = 5$ $\alpha = 60^\circ$) lub ($b = 5$, $c = 8$ $\alpha = 60^\circ$)	2
	Obliczenie pola trójkąta; $P = \frac{1}{2} 40 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$	1
10	Wykonanie rysunku wraz z oznaczeniami	0,5
	Wyznaczenie drugiej współrzędnej punktu C korzystając z równania $SO = \frac{1}{3} SC$, gdzie O jest środkiem ciężkości trójkąta; $y_c = 1$	2
	Wyznaczenie pierwszej współrzędnej punktu C korzystając np. z równania $\frac{1}{2} d(AC, AB) = 3$; $x_c = 0$ lub $x_c = 4$	2
	Zapisanie współrzędnych punktu C; $C = (0, 1)$ lub $C = (4, 1)$	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.