

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa III LO - zakres podstawowy
Etap rejonowy – 11.12.2004 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wykaż, że liczba $9^8 + 9^7 + 9^6 + \dots + 9^2 + 9$ jest podzielna przez 90.

Zadanie 2 (2 pkt)

Rozważ wszystkie trójkąty rozwartokątne, których długości boków są kolejnymi liczbami nieparzystymi. Wyznacz długości boków trójkątów spełniających te warunki.

Zadanie 3 (3 pkt)

Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt równa się $\frac{1}{3}$ długości wysokości tego trójkąta poprowadzonej do boku, którego długość jest środkowym wyrazem tego ciągu.

Zadanie 4 (3 pkt)

Oblicz :

$$(\cos \alpha) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right).$$

Zadanie 5 (4 pkt)

W czasie spływu kajakowego uczniowie mieli do przeplłynięcia trasę o długości 84 kilometrów. Podzielili tę trasę na odcinki równej długości i codziennie przepływali wyznaczony odcinek. Gdyby przeplłynięcie całej trasy trwało dwa dni dłużej, to dziennie mogliby przepływać o 7 kilometrów mniej.

Ile kilometrów dziennie przepływali uczniowie?

Zadanie 6 (4 pkt)

Sprawdź, czy liczba $\sqrt{\left| 40\sqrt{2} - 57 \right|} - \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 7 (4 pkt)

Jeden z boków trójkąta ma długość $1 + \sqrt{3}$, a kąty przylegające do tego boku mają miary 45° i 30° . Oblicz pole tego trójkąta.

Zadanie 8 (4 pkt)

Rozwiąż równanie w zależności od wartości parametru a

$$x \cdot a^{\frac{x}{|x|}} = 1$$

Zadanie 9 (5 pkt)

Szklankę w kształcie walca o średnicy 6 centymetrów i wysokości 9 centymetrów napełniono wodą. Następnie szklankę przechylono, tak, że $\frac{1}{3}$ wody wylała się. Wyznacz miarę kąta, pod jakim przechylono szklankę (kąt nachylenia podstawy do podłoża).

Zadanie 10 (5 pkt)

Dla jakich wartości parametru a zbiór rozwiązań układu:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 < 1 \\ y = ax^2 \end{cases}$$

nie jest zbiorem pustym.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy III LO – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie danej sumy w postaci : $9^7(9+1) + 9^5(9+1) + 9^3(9+1) + 9(9+1)$	1
	Zapisanie danej sumy w postaci : $90(9^6 + 9^4 + 9^2 + 1)$	0,5
	Uzasadnienie, że suma jest podzielna przez 90	0,5
2	Zapisanie układu nierówności : $a + b > c$, $a^2 + b^2 < c^2$, gdzie a, b, c są kolejnymi liczbami nieparzystymi $2n+1, 2n+3, 2n+5$	1
	Wyznaczenie n : $n = 1$ lub $n = 2$	0,5
	Obliczenie długości boków: (3,5,7) lub (5,7,9)	0,5
3	Zapisanie wzoru na pole trójkąta po uwzględnieniu, że długości boków są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $P = 1,5rb$, gdzie b jest środkowym wyrazem tego ciągu a r promieniem okręgu wpisanego w okrąg	1,5
	Zapisanie równania : $1,5rb = 0,5bh$, gdzie h jest wysokością opuszczoną na bok o długości b	1
	Zapisanie związku pomiędzy promieniem a wysokością : $r = \frac{1}{3}h$	0,5
4	Zapisanie założenia : $1 + \tan^2 \alpha \geq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$ i $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ czyli $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	0,5
	Przekształcenie wyrażenia do postaci : $\frac{\cos \alpha}{ \cos \alpha }$	1,5
	Obliczenie wartości wyrażenia dla $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$: - 1	1
5	Analiza zadania	0,5
	Zapisanie równania $\frac{84}{x} + 2 = \frac{84}{x-7}$ gdzie x jest liczbą kilometrów przepływanych dziennie	1
	Rozwiązanie równania : $x_1 = -14, x_2 = 21$	2
	Sprawdzenie warunków zadania i udzielenie odpowiedzi : 21 km	0,5
6	Zauważenie, że liczba $40\sqrt{2} - 57$ jest liczbą ujemną i zapisanie różnicy w postaci $\sqrt{57-40\sqrt{2}} - \sqrt{57+40\sqrt{2}}$	1
	Przyjmując, że różnica jest równa liczbie całkowitej t , $t < 0$ obliczenie t^2 ; $t^2 = 57 - 40\sqrt{2} - 2\sqrt{57-40\sqrt{2}}\sqrt{57+40\sqrt{2}} + 57 + 40\sqrt{2} = 100$	1,5
	Obliczenie t : - 10	1,5
7	Analiza zadania - rysunek trójkąta ABC z oznaczeniami $ AB = 1 + \sqrt{3}, \angle A = 45^\circ, \angle B = 30^\circ$	0,5
	Zaznaczenie wysokości CD trójkąta ABC oraz obliczenie $\tan 30^\circ$ w trójkącie BCD: $\tan 30^\circ = \frac{ CD }{1 + \sqrt{3} - CD }$	2,5
	Obliczenie długości wysokości trójkąta : 1	0,5
	Obliczenie pola trójkąta : $P = 0,5(1 + \sqrt{3})$	0,5
8	Zapisanie założenia : $x \neq 0$	0,5
	Rozwiązanie równania dla dwóch przypadków : $x > 0, x = \frac{1}{a}$ lub $x < 0, x = a$	2
	Równanie ma jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{a}$ dla $a > 0$,	1,5

	Równanie ma jedno rozwiązanie $x = a$ dla $a < 0$ Równanie nie ma rozwiązania dla $a = 0$	
9	Analiza zadania - rysunek z oznaczeniami	1,5
	Obliczenie objętości walca : $V = 81 \pi$	0,5
	Zapisanie faktu, że objętość wylanej wody jest połową objętości walca o wysokości $6 \tan \alpha$ i promieniu równym 3	2
	Obliczenie miary kąta : 45°	1
10	Uzyskanie nierówności w postaci $a^2 x^4 + (1 - 4a)x^2 + 3 < 0$	2
	Zapisanie nierówności w postaci $a^2 t^2 + (1 - 4a)t + 3 < 0$, gdzie $t = x^2$	0,5
	Sformułowanie warunków : $\Delta > 0$ i ($t_1 > 0$ lub $t_2 > 0$), gdzie Δ , t_1 , t_2 oznaczają odpowiednio wyróżnik i miejsca zerowe lewej strony nierówności.	2
	Wyznaczenie wartości a : $a \in (\frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \infty)$	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.

