

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa III LO, IV Technikum- zakres podstawowy
Etap rejonowy – 02.12.2006 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wykaż, że suma dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.

Zadanie 2 (2 pkt)

Sumę $S = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{21 \cdot 24} + \frac{3}{24 \cdot 27}$ można obliczyć w następujący sposób:

$$S = \frac{4-1}{1 \cdot 4} + \frac{7-4}{4 \cdot 7} + \frac{10-7}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{24-21}{21 \cdot 24} + \frac{27-24}{24 \cdot 27} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{21} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

Oblicz sumę: $S = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{341 \cdot 345}$

Zadanie 3 (3 pkt)

Żółw pokonuje 2 metry w ciągu pierwszej godziny, a w ciągu każdej kolejnej godziny drogę o jedną piątą krótszą od drogi pokonanej w ciągu poprzedniej godziny. W jakiej odległości od domu należałoby wypuścić żółwia aby miał szansę dotrzeć tam w ciągu 6 godzin? Wynik podaj z dokładnością do 0,01 metra.

Zadanie 4 (3 pkt)

Wartość użytkowa pewnej maszyny maleje z roku na rok o tę samą kwotę. Oblicz czas w którym maszyna straci całkowicie wartość użytkową, jeżeli wiadomo, że jej wartość po 25 latach była trzy razy mniejsza, niż jej wartość po 15 latach.

Zadanie 5 (4 pkt)

Oblicz wartość wyrażenia : $x = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ dla $n=1992$.

Zadanie 6 (4 pkt)

W trójkącie ABC wysokość CD i środkowa CE dzielą kąt ACB na trzy równe części.

Wyznacz miarę kąta ACB wykorzystując między innymi wzór $\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

Zadanie 7 (4 pkt)

Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te podzieliły przekątną na trzy równe części. Znajdź stosunek długości boków tego prostokąta.

Zadanie 8 (4 pkt)

Wyznacz wartości parametru m dla których równanie $\sin x = \frac{1-m}{m+2}$ jest sprzeczne.

Zadanie 9 (5 pkt)

Okno ma kształt prostokąta zakończonego na górze półkolem. Jaka powinna być podstawa prostokąta, aby przy obwodzie okna wynoszącym 2 metry powierzchnia okna była największa?

Zadanie 10 (5 pkt)

Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = (1-x)\sqrt{x^2+2x+1}$. Ile rozwiązań posiada równanie $(1-x)\sqrt{x^2+2x+1} = m$ w zależności od wartości parametru m ?

Życzymy powodzenia!

Kryteria oceniania dla klasy III LO, IV Technikum– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3: $3n+1, 3n+2$	1
	Zapisanie sumy dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3: $6n+3$	0,5
	Uzasadnienie, że $6n+3$ jest podzielne przez 3 i udzielenie odpowiedzi	0,5
2	Zapisanie sumy w postaci: $S = \frac{5-1}{1 \cdot 5} + \frac{9-5}{5 \cdot 9} + \frac{13-9}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{341-337}{337 \cdot 341} + \frac{345-341}{341 \cdot 345}$	1
	Zapisanie sumy w postaci: $S = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{337} - \frac{1}{341} + \frac{1}{341} - \frac{1}{345}$	0,5
	Obliczenie sumy: $S = 1 - \frac{1}{345} = \frac{344}{345}$	0,5
3	Uzasadnienie, że mamy ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{4}{5}$ w którym a_n to droga przebyta w n -tej godzinie, a S_n to droga przebyta w ciągu n godzin	1,5
	Znajomość wzoru na S_6 i obliczenie S_6 : $S_6 \approx 7,38$ metrów	1
	Udzielenie odpowiedzi: Żółw powinien być wypuszczony w odległości od domu co najwyżej równej 7,38 metra	0,5
4	Analiza zadania: a_{25} wartość użytkowa maszyny po 25 latach, a_{15} wartość użytkowa maszyny po 15 latach	1
	Zapisanie równania $a_1 + 24r = \frac{1}{3}(a_1 + 14r)$	1
	Zapisanie równania w postaci $a_1 + (30-1)r = 0$	0,5
	Udzielenie odpowiedzi: po 30 latach maszyna straci całkowicie wartość użytkową.	0,5
5	Zapisanie wyrażenia w postaci: $x = \frac{(n+2+\sqrt{n^2-4})^2 + (n+2-\sqrt{n^2-4})^2}{(n+2)^2 - (\sqrt{n^2-4})^2}$	2
	Zapisanie wyrażenia w postaci: $x = \frac{2(n+2)^2 + 2(n^2-4)}{4(n+2)}$	1
	Zapisanie wyrażenia w postaci: $x = \frac{2(n+2)n}{2(n+2)}$ i podanie wartości wyrażenia $x = 1992$	1
6	Rysunek wraz z oznaczeniami, np. $ AB = 4a, \angle ACB = 3\alpha$	0,5
	Zauważenie i uzasadnienie, że $ AD = DE = \frac{1}{2} EB = a$	0,5
	Obliczenie $\operatorname{tg} \alpha$ z trójkąta ADC i $\operatorname{tg} 2\alpha$ z trójkąta DBC : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h}, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3a}{h}$, gdzie h jest długością wysokości CD trójkąta	1
	Zauważenie związku pomiędzy $\operatorname{tg} \alpha$ a $\operatorname{tg} 2\alpha$: $\operatorname{tg} 2\alpha = 3\operatorname{tg} \alpha$	0,5
	Zapisanie równania: $\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = 3\operatorname{tg} \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ lub $\frac{2t}{1-t^2} = 3t, t > 0$	0,5

	Rozwiązanie równania : $\alpha = \frac{\pi}{6}, (\alpha = 30^0)$	0,5
	Udzielenie odpowiedzi: miara kąta ACB wynosi $\frac{\pi}{2} rad$ lub 90^0	0,5
7	Rysunek wraz z oznaczeniami np. : a – długość odcinków, na które została podzielona przekątna, h - długość wysokości w trójkątach na które został podzielony prostokąt przez przekątną, x, y długości boków prostokąta	0,5
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a^2 + h^2 = x^2 \\ (2a)^2 + h^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = (3a)^2 \end{cases}$	1,5
	Zapisanie x^2 i y^2 przy pomocy a : $x^2 = 3a^2, y^2 = 6a^2$	1,5
	Obliczenie stosunku długości boków prostokąta; $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$	0,5
8	Założenie $m \neq -2$	0,5
	Zapisanie koniunkcji nierówności: $\begin{cases} \frac{1-m}{m+2} \geq -1 \\ \frac{1-m}{m+2} \leq 1 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu nierówności po uwzględnieniu założenia: $m \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$	2
	Wyznaczenie zbioru wartości parametru m dla których równanie jest sprzeczne: $m \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ i udzielenie odpowiedzi	0,5
9	Rysunek wraz z oznaczeniami; np. a długość podstawy, b wysokość części prostokątnej okna, $r = \frac{1}{2}a$, gdzie r to promień półkola	0,5
	Zapisanie warunku w postaci równania: $2b + a(1 + \frac{\pi}{2}) = 2$	0,5
	Wyznaczenie np. b : $b = 1 - a(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})$	0,5
	Zapisanie założenia : $0 < a < \frac{4}{2+\pi}$	1
	Zapisanie pola powierzchni okna w postaci : $P(a) = -\frac{4+\pi}{8}a^2 + a$	1
	Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji oraz naszkicowanie wykresu funkcji.	0,5
	Obliczenie a dla którego pole powierzchni okna jest największe i sprawdzenie czy spełnia założenia: $a = \frac{4}{4+\pi}$ i $a \in \left(0, \frac{4}{2+\pi}\right)$	0,5
	Udzielenie odpowiedzi: dla $a = \frac{4}{4+\pi}$ pole powierzchni okna jest największe	0,5
10	Zapisanie funkcji w postaci $f(x) = (1-x) x+1 $	1,5

	Zapisanie funkcji w postaci $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{dla } x \geq -1 \\ x^2-1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$	1
	Wykonanie wykresu funkcji	1
	Odczytanie z wykresu, że równanie posiada: 1 pierwiastek dla $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ 2 pierwiastki dla $m \in \{0, 1\}$ 3 pierwiastki dla $m \in (0, 1)$	1,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.