

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa III LO, IV Technikum - zakres podstawowy
Etap II – 15.12.2007 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Wykaż, że jeżeli liczby naturalne m oraz n spełniają warunek $m - n = 2$ to liczba $m \cdot n + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej

Zadanie 2 (2 pkt)

Na okręgu obierz trzy punkty A, B, C tak, aby powstał trójkąt prostokątny, a miara kąta ostrego CAB wynosiła 30° . Oblicz miary kątów środkowych opartych na łukach wyznaczonych przez przyprostokątne AC oraz BC trójkąta prostokątnego ABC .

Zadanie 3 (3 pkt)

Miary trzech kolejnych kątów czworokąta wpisanego w koło tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 47° . Oblicz miary kątów tego czworokąta.

Zadanie 4 (3 pkt)

Wiadomo, że $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$. Oblicz $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ wykorzystując w tym celu wzór na kwadrat różnicy oraz sumy.

Zadanie 5 (4 pkt)

Rowerzysta przejechał 150 kilometrów, pokonując codziennie tę samą trasę. Gdyby każdego dnia podróży przejeżdżał o 20 kilometrów więcej to jego podróż trwałaby o dwa dni krócej. Ile dni podróżował rowerzysta?

Zadanie 6 (4 pkt)

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i $2a$. Oblicz długość promienia okręgu stycznego do obu przyprostokątnych wiedząc, że jego środek leży na przeciwprostokątnej.

Zadanie 7 (4 pkt)

Znajdź wartość $f(2)$, jeśli dla dowolnego $x \neq 0$ spełniona jest równość: $f(x) + 3 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$

Zadanie 8 (4 pkt)

Liczbę dwucyfrową podzielono przez iloczyn jej cyfr i otrzymano 2 resztę 5. Cyfry tej liczby zostały zamienione miejscami i otrzymana w ten sposób liczba została podzielona przez sumę jej cyfr. W wyniku otrzymano 7 i resztę 3. Znajdź tę liczbę.

Zadanie 9 (5 pkt)

Wykaż, że jeżeli współczynniki a, b, c, d wielomianu $W(x) = ax^3 - bx^2 - cx + d$ są kolejnymi liczbami naturalnymi to wielomian ma trzy różne pierwiastki.

Zadanie 10 (5 pkt)

Dany jest romb $ABCD$. Dłuższa przekątna AC przecina jego wysokość DE opuszczoną na bok BC w punkcie S takim, że $\frac{|DS|}{|SE|} = \frac{13}{7}$. Oblicz długość wysokości DE , wiedząc, że $|AE| = 17$.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy III LO, IV Technikum– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie m przy pomocy n : $m = n + 2$	0,5
	Zapisanie liczby $mn + 1$ w postaci $(n + 2)n + 1$ czyli $n^2 + 2n + 1$	0,5
	Zapisanie liczby w postaci $(n + 1)^2$ i udzielenie odpowiedzi : liczbę $mn + 1$ można zapisać w postaci kwadratu liczby naturalnej	1
2	Wykonanie rysunku	0,5
	Zauważenie, że kąt prosty ACB jest oparty na półokręgu a odcinki OA , OB i OC mają długość równą promieniowi okręgu, gdzie O jest środkiem okręgu	0,5
	Obliczenie miary kątów środkowych: $ \angle AOC = 120^\circ$, $ \angle BOC = 60^\circ$	1
3	Rysunek wraz z oznaczeniami: $ \angle A = \alpha$, $ \angle B = \alpha + 47^\circ$, $ \angle C = \alpha + 94^\circ$	1
	Znajomość twierdzenia o czworokącie wpisanym w koło	0,5
	Zapisanie równania : $\alpha + \alpha + 94^\circ = 180^\circ$	0,5
	Rozwiązanie równania : $\alpha = 43^\circ$	0,5
	Podanie miar pozostałych kątów: 90° , 137° , 90°	0,5
4	Zapisanie kwadratu różnicy w postaci: $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x$	0,5
	Zapisanie kwadratu różnicy w postaci $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 4\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$	2
	Obliczenie kwadratu różnicy a także różnicy i udzielenie odpowiedzi: różnica jest równa 0	0,5
5	Analiza zadania: n – liczba dni, w czasie których rowerzysta przejechał 150 kilometrów, $\frac{150}{n}$ – trasa, którą pokonał w ciągu jednego dnia, $\frac{150}{n-2}$ trasa, którą pokonałby w ciągu jednego dnia gdyby codziennie przejeżdżał o 20 kilometrów więcej, $n \in N$ i $n > 2$	1
	Ułożenie równania : $\frac{150}{n} + 20 = \frac{150}{n-2}$	1
	Rozwiązanie równania : $n_1 = -3$, $n_2 = 5$	1,5
	Udzielenie odpowiedzi: rowerzysta podróżował 5 dni	0,5
6	Rysunek wraz z oznaczeniami: $ AC = 2a$, $ BC = a$, $ \angle ACB = 90^\circ$, r – promień okręgu.	1
	Zauważenie podobieństwa trójkątów i zapisanie zależności $\frac{r}{a} = \frac{2a-r}{2a}$ lub $\frac{a-r}{r} = \frac{r}{2a-r}$ lub $\frac{a-r}{a} = \frac{r}{2a}$	2
	Rozwiązanie równania i podanie odpowiedzi: $r = \frac{2}{3}a$	1
7	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} f(2) + 3 \cdot f(\frac{1}{2}) = 4 \\ f(\frac{1}{2}) + 3 \cdot f(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$	2

	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} f(2) = -\frac{13}{32} \\ f(\frac{1}{2}) = 1\frac{15}{32} \end{cases}$ i udzielenie odpowiedzi: $f(2) = -\frac{13}{32}$	1,5
	Udzielenie odpowiedzi: $f(2) = -\frac{13}{32}$	0,5
8	Analiza zadania: x - cyfra dziesiątek, y – cyfra jedności, $x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $10x+y$ liczba początkowa, $10y+x$ liczba po przestawieniu cyfr	1
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 10x + y = 2x \cdot y + 5 \\ 10y + x = 7(x + y) + 3 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \end{cases}$	1
	Dokonanie wyboru pary liczb spełniających warunki zadania i udzielenie odpowiedzi: tą liczbą jest liczba 25	1
9	Zapisanie wielomianu w postaci: $W(x) = nx^3 - (n+1)x^2 - (n+2)x + n + 3$, gdzie $n \in N$	1
	Wykazanie, że liczba 1 jest pierwiastkiem tego wielomianu czyli, że $W(1) = 0$	0,5
	Zapisanie wielomianu w postaci $W(x) = (x-1)(nx^2 - x - n - 3)$ po wykonaniu odpowiedniego dzielenia	1,5
	Obliczenie $\Delta = 1 + 4n(n+3) = 4n^2 + 12n + 1$	0,5
	Wykazanie, że delta jest większa od zera dla każdego n , a tym samym, że ten trójmian posiada dwa różne pierwiastki	0,5
	Sprawdzenie, czy liczba 1 jest pierwiastkiem trójmianu i udzielenie odpowiedzi : $f(1) = -4$ a więc liczba 1 nie jest pierwiastkiem trójmianu	0,5
	Uzasadnienie, że wielomian $W(x)$ posiada trzy różne pierwiastki	0,5
10	Rysunek wraz z oznaczeniami: a – długość boku rombu	0,5
	Znajomość Twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie	0,5
	Zapisanie równości : $\frac{ DS }{ SE } = \frac{ DC }{ CE }$, czyli $\frac{a}{ CE } = \frac{13}{7}$	0,5
	Znajomość Twierdzenia Pitagorasa	0,5
	Zapisanie układu równań dla trójkątów AED i DEC : $\begin{cases} a^2 + DE ^2 = AE ^2 \\ DE ^2 + EC ^2 = a^2, \text{ gdzie } CE = \frac{7}{13}a \text{ i } AE = 17 \end{cases}$	2
	Obliczenie długości wysokości DE : $2\sqrt{30}$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.