

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Poziom III – zakres podstawowy
Etap rejonowy – 13.12.2008 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Czy liczba $10^{1997} + 8$ jest podzielna przez 9? Odpowiedz uzasadnij.

Zadanie 2 (2 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji, która ma następujące trzy własności:

1. Dziedziną funkcji jest $[-5, 5]$, zbiorem wartości jest $[-6, 6]$,
2. funkcja rośnie w przedziałach $(-5, -2)$, $(2, 5)$ a maleje w przedziale $(-2, 2)$
3. wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 3 (3 pkt)

Jeżeli w liczbie dwucyfrowej przestawimy cyfry, to różnica tych liczb równa się $\frac{3}{4}$ mniejszej z tych liczb. Jaka to liczba? Podaj wszystkie rozwiązania.

Zadanie 4 (3 pkt)

W trapezie podstawy mają długości a cm i b cm ($a > b$). Kąty przy dłuższej podstawie dają w sumie kąt prosty. Wyznacz długość odcinka łączącego środki podstaw tego trapezu.

Zadanie 5 (4 pkt)

Wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego równoramiennego jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 - 4x$ a pozostałe dwa wierzchołki leżą na ramionach paraboli. Oblicz pole powierzchni trójkąta.

Zadanie 6 (4 pkt)

Miary kątów trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, a jego obwód jest równy $3(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Oblicz długości boków tego trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt

Zadanie 7 (4 pkt)

W trójkąt równoramienny prostokątny o przyprostokątnych długości a wpisano prostokąt, którego dwa wierzchołki leżą na podstawie, a dwa na ramionach trójkąta. Wyznacz wymiary prostokąta tak, aby jego pole było największe.

Zadanie 8 (4 pkt)

Trzy liczby dodatnie tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli ostatnią liczbę zmniejszymy o dwa, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Jeżeli do pierwszej liczby otrzymanego ciągu arytmetycznego dodamy $\frac{2}{3}$ to znowu otrzymamy ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

Zadanie 9 (5 pkt)

W okręgu o środku w punkcie O i promieniu R poprowadzono dwie prostopadłe średnice AB i CD oraz cięciwę przecinającą średnicę CD w punkcie N . Wiedząc, że w czworokąt $OBNM$ można wpisać okrąg wyznacz miarę kąta między cięciwą AM a średnicą AB .

Zadanie 10 (5 pkt)

Droga ma długość 36 kilometrów. Jeden z rowerzystów przebywa ją w czasie o 15 minut krótszym niż drugi, który jedzie o 2 km na godzinę wolniej. Oblicz prędkości rowerzystów.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla poziomu III zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Liczba pkt
1	Znajomość cechy podzielności przez 9.	0,5
	Zauważenie, że pierwszy składnik będzie liczbą w której na początku będzie cyfra 1 a pozostałe będą zera	1
	Obliczenie sumy cyfr otrzymanej liczby i udzielenie odpowiedzi: liczba jest podzielna przez 9	0,5
2	Narysowanie wykresu uwzględniając jeden z warunków	0,5
	Narysowanie wykresu uwzględniając dwa warunki jednocześnie	1,5
	Narysowanie wykresu uwzględniając wszystkie warunki	max 2
3	Zapisanie liczby dwucyfrowej w postaci : $10 \cdot x + y$, gdzie x cyfra dziesiątek, y cyfra jedności i	0,5
	Zakładając, że liczba $10x + y > 10y + x$ zapisanie równania	1
	Przekształcenie równania do postaci $x = 2y$	1
	Wypisanie liczb spełniających warunek zadania: 21, 42, 63, 84	0,5
4	Analiza zadania, rysunek wraz z oznaczeniami	0,5
	Zauważenie, że przedłużenia ramion trapezu przecinają się pod kątem prostym, a tym samym odcinki CD i AB są średnicami okręgów opisanych odpowiednio na trójkącie DCE i ABE, gdzie E jest wierzchołkiem kąta prostego.	1,5
	Obliczenie długości odcinków EK i EL, gdzie L to środek odcinka AB a K to środek odcinka CD:	0,5
	Obliczenie odległości pomiędzy środkami podstaw i udzielenie odpowiedzi odległość wynosi $\left \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \right $ czyli $\frac{1}{2} a - b $ lub uwzględniając założenie $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ czyli $\frac{1}{2}(a - b)$	0,5
5	Obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli : $W = (2, -4)$,	0,5
	Wyznaczenie równań prostych przechodzących przez punkt W i zawierających przyprostokątne trójkąta :	1
	Zapisanie alternatywy układów równań : lub zapisanie jednego układu równań i wyznaczenie współrzędnych drugiego wierzchołka trójkąta wykorzystując fakt, że prosta $x = 2$ jest osią symetrii paraboli.	1
	Rozwiązanie alternatywy układu równań ; Podanie współrzędnych punktów A, B :	1
	Obliczenie pola : $P = 1$	0,5

6	Analiza zadania, rysunek wraz z oznaczeniami: 	0,5
	Zapisanie długości boków trójkąta na przykład przy pomocy c: $a = \frac{1}{2}c, b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$	0,5
	Zapisanie równania : $c = \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c$	0,5
	Rozwiązanie równania : $c = 2\sqrt{6}$	0,5
	Obliczenie długości pozostałych boków : $a = \sqrt{6}, b = 3\sqrt{2}$	0,5
	Obliczenie pola trójkąta : $P = 3\sqrt{3}$	0,5
	Zapisanie równania : $\frac{3(\sqrt{6}+2)r}{2} = 3\sqrt{3}$, gdzie r to promień okręgu wpisanego w trójkąt.	0,5
	Obliczenie r : $r = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$	0,5
7	Analiza zadania: x - długość odcinka DE, y – długość odcinka EF, gdzie DE i EF to boki prostokąta	0,5
	Zauważenie i uzasadnienie, że trójkąty EBF i BCH są podobne gdzie H jest punktem wspólnym wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C i boku AB	0,5
	Zapisanie zależności : $\frac{y}{a\sqrt{2}-x} = 1$	0,5
	Zapisanie zależności w postaci : $y = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}$	0,5
	Zapisanie pola prostokąta w postaci $P(x) = x \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2} \right)$ i ustalenie dziedziny $D_p = (0, a\sqrt{2})$	0,5
	Wyznaczenie wartości x dla której funkcja przyjmuje wartość największą i sprawdzenie czy liczba należy do dziedziny funkcji : $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $x \in D_p$	0,5
	Obliczenie y : $y = \frac{a\sqrt{2}}{4}$	0,5
	Udzielenie odpowiedzi: Wymiary prostokąta o największym polu są $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $y = \frac{a\sqrt{2}}{4}$	0,5
8	Analiza zadania : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ - ciąg arytmetyczny, $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \frac{64}{729}, \frac{128}{2187}, \frac{256}{6561}, \frac{512}{19683}, \frac{1024}{59049}, \frac{2048}{177147}$ - ciąg geometryczny	0,5

	Zapisanie układu równań : $\begin{cases} q \cdot q = \frac{q+q \cdot q - 2}{2} \\ (q \cdot q)^2 = \left(q + \frac{2}{3}\right)(q \cdot q - 2) \end{cases}$	1,5
	Rozwiązanie układu równań : $\begin{cases} a_1 = 2 \\ q_1 = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = -1 \\ q_1 = -1 \end{cases}$ i dokonanie wyboru pary, która spełnia warunki zadania	1,5
	Podanie wyrazów ciągu : 2, 4, 8	0,5
9	Analiza zadania, rysunek z zaznaczonymi średnicami i cięciwą oraz wpisanym okręgiem	1
	Stwierdzenie, że trójkąt AMB jest prostokątny	0,5
	Zapisanie warunku na to aby w czworokąt można było wpisać okrąg: OB + MN = ON + MB	1
	Wykazanie, że BM = OB = R	1,5
	Zauważenie, że trójkąt AMB jest połową trójkąta równobocznego i podanie miary kąta BAM: 30°	1
10	Analiza zadania : t – czas przejazdu pierwszego rowerzysty (wyrażony w godzinach), $V_1 = \frac{36}{t}$ - prędkość pierwszego rowerzysty, $V_2 = \frac{36}{t + \frac{1}{4}}$	1
	Zapisanie równania : $\frac{36}{t} - \frac{36}{t + \frac{1}{4}} = 2$	0,5
	Przekształcenie równania do postaci : $4t^2 + t - 18 = 0$	1,5
	Rozwiązanie równania : $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{4}$	1
	Wybór odpowiedniej wartości dla t i obliczenie prędkości rowerzystów: Wybór t = 2	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.