

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO i II, III Technikum, podstawowy zakres nauczania matematyki
etap rejonowy 18.12.2010 r.

Czas rozwiązywania zadań – 150 minut.

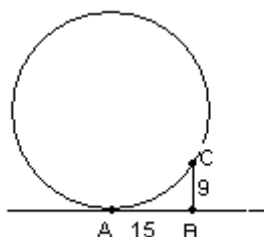
Zadanie 1-(2p) Znajdź co najmniej jedną trzycyfrową liczbę K , taką, że $K^2 - 1$ jest wielokrotnością 5, a cyfrą jednościami K nie jest 1 ani 6.

Zadanie 2-(2p) Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(m, 5)$ oraz $(1, m)$ jest równy m . Znajdź równanie tej prostej.

Zadanie 3-(3p) Marek jest o 3 lata starszy od Marty, a Andrzej jest o 2 lata młodszy od Ani. Olek ma 16 lat. Ile lat ma Ola, jeśli średnia wieku 3 chłopców jest o 2 lata większa od średniej wieku trzech dziewcząt?

Zadanie 4-(3p) Pewna funkcja liniowa $f(x)$ spełnia warunek $f(2x + 3) = 3x - 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Znajdź wzór tej funkcji.

Zadanie 5-(4p) Oblicz długość promienia okręgu przedstawionego na poniższym rysunku. Prosta AB jest styczna do okręgu w punkcie A , a odcinek BC jest prostopadły do prostej AB .



Zadanie 6-(4p) Wiadomo, że $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3$. Oblicz $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$

Zadanie 7-(4p) Suma cyfr roku, w którym urodził się Adam jest równa wiekowi Adama w obecnym roku kalendarzowym. Ile lat ma Adam?

Zadanie 8-(4p) Udowodnij, że jeżeli $a + b + c = 0$ oraz $a \neq 0$ to rozwiązaniami równania $ax^2 + bx + c = 0$ są liczby 1 i $\frac{c}{a}$.

Zadanie 9-(5p) Dla jakiego m równanie $||x + 3| - 2| = m$ ma dokładnie 3 rozwiązania?

Zadanie 10-(5p) Podstawy trapezu mają długości 6 i 8. Oblicz długość odcinka równoległego do podstaw, który dzieli trapez na dwie figury o równych polach.

Propozycja punktowania zadań dla klas II LO i II, III Technikum z podstawowym programem nauczania matematyki na etapie rejonowym Międzyszkolnych Zawodów Matematycznych (2010/2011).

Nr zadania	czynność	punkty
1	Ustalenie, że ostatnią cyfrą liczby K może być 4 lub 9	1,5
	Znalezienie jednej z liczb spełniających warunki np. 124	0,5
2	Podstawienie współrzędnych punktów do równania kierunkowego prostej	1
	Rozwiązanie zadania i podanie obu odpowiedzi $y = \sqrt{5}x$ lub $y = -\sqrt{5}x$	1
3	Oznaczenia m-wiek Marty, m+3-wiek Marka, a-wiek Ani, a – 2 –wiek Andrzeja, o-wiek Oli	1
	Ułożenie równania $\frac{m+a+o}{3} + 2 = \frac{m+3+a-2+16}{3}$	1
	Obliczenie o=11	1
4	Ułożenie równania $a(2x+3)+b=3x-1$	1
	Przyrównanie współczynników obu funkcji $2a=3$ i $3a+b=-1$	1
	Znalezienie $a = \frac{3}{2}$ i $b = -\frac{11}{2}$ i zapisanie wzoru funkcji $y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$	1
5	Zaznaczenie trójkąta AOC	0,5
	Wyznaczenie trójkąta prostokątnego o bokach długości r, r – 9, 15	2
	Rozwiązanie równania $(r-9)^2 + 15^2 = r^2$ i wyznaczenie r=17	1,5
6	Oznaczenie $x = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$	0,5
	Zapisanie układu równań $\begin{cases} \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3 \\ \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = x \end{cases}$, dodanie i odjęcie równań stronami do otrzymania $\begin{cases} 2\sqrt{a} = 3 + x \\ \frac{2}{\sqrt{a}} = 3 - x \end{cases}$	2
	Rozwiązanie ostatniego układu $x = \sqrt{5}$ lub $x = -\sqrt{5}$	1,5
7	Rozpatrzenie 2 przypadków: Adam urodził się w 20 lub w 21 wieku	1
	Ułożenie równania do wieku 20: $10+a+b=2010-1900-10a-b$, gdzie a, b są cyframi i znalezienie jedyne rozwiązanie 24 lata (rok urodzenia 1986)	2
	Ułożenie równania do wieku 21: $2+a+b=2010-2000-10a-b$, gdzie a, b są cyframi i znalezienie jedyne rozwiązanie 6 lat (rok urodzenia 2004)	1
8	Obliczenie $\Delta = \Delta = (a-c)^2$ i uzasadnienie, że jest ona zawsze nieujemna Uwaga: odejmujemy 0,5 p. za zapisanie $\sqrt{\Delta} = a-c$ zamiast $\sqrt{\Delta} = a-c $	2
	Obliczenie pierwiastków równania 1 oraz c/a	2
9 I metoda	Znalezienie 4 możliwych rozwiązań: $x=m-1$, $x=-m-5$, $x=-m-1$, $x=m-5$	2
	Rozpatrzenie wszystkich możliwości gdy któreś 2 (i tylko 2) rozwiązania są jednakowe: $m-1=-m-5$, $m-1=-m-1$, $m-5=-m-5$, $m-5=-m-1$ i odrzucenie pozostałych	2
	Sprawdzenie wyników i zapisanie rozwiązania: $m=2$	1
9 II metoda	Narysowanie wykresu $f(x) = x+3 - 2$	2
	Narysowanie wykresu $ f(x) = x+3 - 2$	1
	Wyznaczenie prostej $y=m$, która ma dokładnie 3 punkty wspólne z wykresem i podanie odpowiedzi $m=2$	2
10	Wykonanie rysunku ze wszystkimi oznaczeniami np. a-wysokość górnego trapezu, b-wysokość dolnego trapezu	1

	Zapisanie wzorów na pola 2 małych i dużego trapezu	1
	Wykorzystanie warunku, że pola małych trapezów są równe połowie pola dużego trapezu do ułożenia równań $(6+x)a=7a+7b$; $(8+x)b=7a+7b$	1
	Wyliczenie x z obu równań i podstawienie $t = a/b$	1
	Rozwiązanie układu ze względu na x , $x = 5\sqrt{2}$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.