

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa I LO i I Technikum – zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 10.03.2007 rok
Czas rozwiązywania zadań – 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Wykaż, że podane liczby należą do zbioru liczb naturalnych:

$$k = (0,027)^{\frac{-1}{3}} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} + 625^{\frac{3}{4}} - 3^{-1} + 6^0, \quad l = \frac{1}{9+4\sqrt{5}} + \frac{1}{9-4\sqrt{5}}, \quad m = \sqrt{\frac{22+\sqrt{475}}{2}} + \sqrt{\frac{22-\sqrt{475}}{2}},$$
$$t = \frac{3}{2}\sqrt{0,(4)}$$

Zadanie 2 (6 pkt)

Dorota ma dwa razy więcej pieniędzy niż Ela i trzy razy mniej pieniędzy niż Beata.

- Oblicz jaki procent pieniędzy wszystkich dziewcząt stanowią pieniądze Beaty.
- Oblicz jaką część swoich pieniędzy powinna Beata dać Eli, a jaką Dorocie, aby każda z nich miała tyle samo pieniędzy.
- Beata wpłaciła swoje pieniądze do banku na lokatę, której oprocentowanie roczne wynosi 5%. Po roku oszczędzania i po potrąceniu 22% podatku od odsetek Beata otrzymała 623,4 złote. Oblicz jaką kwotę wpłaciła Beata.

Zadanie 3 (6 pkt)

Funkcja f określona na zbiorze liczb naturalnych większych od 9, przyporządkowuje każdej liczbie n cyfrę dziesiątek liczby n .

- Określ zbiór wartości funkcji f ,
- Dla ilu argumentów mniejszych od 999 funkcja f przyjmuje wartość 6?
- Dla jakich $k \in \mathbb{N}$, liczba $10k$ jest miejscem zerowym funkcji f ?
- Dla jakich n nie zachodzi równość $f(n+1) = f(n)$?

Zadanie 4 (6 pkt)

W trapezie równoramiennym ABCD połączono odcinkami środki sąsiednich boków.

- wykaż, że powstały czworokąt EFGH jest rombem,
- oblicz pole rombu, mając dane długości a i b podstaw trapezu ($a > b$) i miarę α kąta ostrego trapezu

Zadanie 5 (6 pkt)

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych równa się sumie średnic koła wpisanego i koła opisanego na tym trójkącie.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy I LO i I Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Obliczenie wartości wyrażenia k ; $k=104, 104 \in N$	1
	Obliczenie wartości wyrażenia l : $l=18, l \in N$	1
	Wyznaczenie kwadratu liczby m : $m^2=25$	1,5
	Wykazanie, że liczba m będąca sumą pierwiastków kwadratowych jest liczbą nieujemną oraz obliczenie m : $m=5$ i $m \in N$	1
	Zapisanie ułamka dziesiętnego okresowego w postaci ułamka zwykłego: $0,(4) = \frac{4}{9}$	1
	Obliczenie wartości wyrażenia t : $t=1, 1 \in N$	0,5
2	Zapisanie liczby pieniędzy dziewcząt za pomocą liczby pieniędzy Elżbiety: $b=6e$, $d=2e$, gdzie b jest to kwota, którą posiadała Beata a d kwota którą posiadała Dorota	1
	Obliczenie jaki procent wszystkich pieniędzy stanowią pieniądze Beaty : $66\frac{2}{3}\%$	1
	Obliczenie jaką część swoich pieniędzy powinna Beata dać Elżbiecie a jaką Dorocie aby miały tyle samo pieniędzy : Dorocie $\frac{1}{6}b$, Elżbiecie $\frac{2}{6}b$	2
	Zapisanie równania z niewiadomą x , gdzie x jest kwotą, którą wpłaciła Beata do banku: $x + (0,05x - 0,22 \cdot 0,05x) = 623,40$	1
	Rozwiązanie równania : $x=600$ i udzielenie odpowiedzi : Beata wpłaciła do banku 600 złotych	1
3	Określenie zbioru wartości funkcji: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	1
	Określenie liczby argumentów: dla stu argumentów	1,5
	Określenie liczby k : k jest liczbą podzielną przez 10	2
	Określenie n : dla tych liczb n , dla których cyfrą jedności jest cyfra 9.	1,5
4	Udowodnienie na podstawie Twierdzenia Talesa i twierdzenia do niego odwrotnego, że odcinki EH i FG (E środek podstawy dolnej AB, F środek ramienia BC, G środek podstawy górnej CD, H środek drugiego ramienia AD) są do siebie równoległe i tej samej długości równej połowie długości przekątnej BD	1,5
	Stwierdzenie na podstawie Twierdzenia Talesa i twierdzenia do niego odwrotnego, że odcinki EF i GH są do siebie równoległe i tej samej długości równej połowie długości przekątnej AC	1
	Wykazanie, że czworokąt EFGH jest rombem	0,5
	Zapisanie długości wysokości trapezu a tym samym długości przekątnej GE rombu w postaci : $h = \frac{1}{2}(a-b)tg\alpha$	0,5
	Zapisanie długości odcinka AH', gdzie H' jest rzutem prostopadłym punktu H na podstawę dolną trapezu : $ AH' = \frac{1}{4}(a-b)$	1
	Zapisanie długości przekątnej HF rombu : $ HF = b + 2 \cdot \frac{1}{4}(a-b) = \frac{a+b}{2}$	1
	Obliczenie pola rombu : $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(a-b)tg\alpha \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{1}{8}(a^2 - b^2) \cdot tg\alpha$	0,5

5	Rysunek wraz z oznaczeniami np. r długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt, R długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, a i b to długości przyprostokątnych, c długość przeciwprostokątnej trójkąta oraz zapisanie warunku, który należy udowodnić: $2r + 2R = a + b$	1
	Zauważenie, że czworokąt CB_1OA_1 (gdzie B_1, A_1 to punkty styczności okręgu z bokami trójkąta leżącymi naprzeciwko odpowiednio wierzchołka B, A , a C wierzchołek kąta prostego) jest kwadratem o boku długości r .	1
	Zauważenie, że $2R = c$,	1
	Zauważenie, że $ AB_1 = AC_1 = b - r, BA_1 = BC_1 = a - r$	1
	Zapisanie długości przeciwprostokątnej w postaci : $c = a - r + b - r = a + b - 2r$	1
	Zapisanie równania w postaci $2R = a + b - 2r$ a następnie w postaci $2R + 2r = a + b$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.