

*Międzyszkolne Zawody Matematyczne  
Klasa II LO, II, III Technikum – zakres podstawowy*

*Etap wojewódzki – 19.03.2011 rok*

*Czas rozwiązywania zadań 150 minut*

Zad.1 ( 6 pkt).

Udowodnij, że jeżeli  $a + b + c = 1$  dla  $a, b, c > 0$ , to  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

Zad.2 ( 6 pkt).

W n-kącie foremnym  $A_1 A_2 \dots A_n$  miara kąta  $A_1 A_3 A_4$  wynosi  $120^\circ$ . Ile przekątnych ma ten wielokąt?

Zad.3 ( 6 pkt).

Na odcinku KL o długości 6 obrano punkt M. Na odcinku KM zbudowano kwadrat, a na odcinku ML trójkąt równoboczny. W jakiej odległości od punktu K powinien leżeć punkt M, aby suma pól tych dwóch figur była najmniejsza?

Zad.4 ( 6 pkt).

Znajdź wszystkie rozwiązania równania  $1 - \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  dla  $x, y$  – liczb całkowitych

Zad.5 ( 6 pkt).

Rozwiąż nierówność  $(2x^2 - 3x - 3)(-1 - 3x + 2x^2) \leq 3$

### Kryteria oceniania dla klasy II LO, II, III Technikum– zakres podstawowy

Nr zadania	czynność	punkty
1	Lewa strona nierówności jest równa $L = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$	2
	$L = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$	1
	Uzasadnienie, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ i analogicznie $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ oraz $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$	2
	$L \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$	1
2	Wykonanie rysunku z oznaczeniami np. a-bok n-kąta, $\alpha$ -kąt wewnętrzny n-kąta	1
	Obliczenie miary kąta wewnętrznego n-kąta $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$	1
	Obliczenie miary kąta $A_2 A_3 A_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$	1
	Zapisanie i rozwiązanie równania $90^\circ - \frac{\alpha}{2} + 120^\circ = \alpha$ , $\alpha = 140^\circ$	1
	Obliczenie n=9	1
	Obliczenie ze wzoru na liczbę przekątnych wielokąta k= 27	1
3	Wykonanie rysunku z oznaczeniami np. x-odległość KM, gdzie $x \in (0;6)$	1
	Obliczenie sumy pól kwadratu i trójkąta $P = x^2 + \frac{(6-x)^2 \sqrt{3}}{4}$	2
	Znalezienie argumentu, dla którego funkcja kwadratowa P(x) przyjmuje najmniejszą wartość	2
	Odpowiedź po usunięciu niewymierności z mianownika $x = \frac{24\sqrt{3} - 18}{13}$	1
4	Podanie założeń $x \neq 0, y \neq 0$ i zapisanie równania w postaci $x + y - xy - 1 = -2$	2
	Rozłożenie na czynniki $(x-1)(1-y) = -2$	1
	Rozpatrzenie wszystkich możliwych przypadków x-1=2, 1-y=-1 itp.	2
	Podanie 2 odpowiedzi: x=3,y=2; x=2, y=3	1
5	Podstawienie $t = 2x^2 - 3x - 3$ i zapisanie nierówności $t(t+2) \leq 3$	2
	Rozwiązanie nierówności $t(t+2) \leq 3$ $t \in [-3;1]$	1
	Rozwiązanie układu nierówności $-3 \leq 2x^2 - 3x - 3 \leq 1$	2
	Podanie odpowiedzi $x \in \left[\frac{3-\sqrt{41}}{4}; 0\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{3+\sqrt{41}}{4}\right]$	1