

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II - zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 17.04.2004 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zad.1 (6 pkt)

Naczynie w kształcie sześcianu całkowicie wypełniono cieczą. Część jego zawartości przelano do dwóch jednakowych pojemników w kształcie prostopadłościanu, wypełniając je całkowicie, po czym w naczyniu sześciennym zostało jeszcze 16 litrów cieczy. Wymiary prostopadłościennego pojemnika tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1 dm, a jego najdłuższa krawędź jest równa krawędzi naczynia sześciennego. Oblicz wymiary pojemnika w kształcie prostopadłościanu.

Zad. 2 (6 pkt)

W romb o boku długości 4 i kącie ostrym 60° wpisano okrąg . Wykaż, że czworokąt XYZT, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu z bokami rombu jest prostokątem oraz oblicz jego pole

Zad 3 (6 pkt)

Zbadaj, czy można wytyczyć działkę 8 arową w kształcie trapezu równoramiennego o kącie ostrym 60° tak, aby jej obwód nie przekraczał 120 metrów.

Zad. 4 (6 pkt)

Trójka liczb całkowitych tworzy ciąg geometryczny o ilorazie q , będącym liczbą całkowitą różną od zera. Gdy najmniejszą z nich zwiększymy o 9 to powstanie ciąg arytmetyczny. Jakiej to liczby?

Zad.5 (6 pkt)

Wyznacz liczby a, b tak, aby pierwiastek równania

$$\frac{1}{\log_x 10 \cdot \log x} = |2 - x|$$

był dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$. Wyznacz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy I I – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Analiza zadania	1
	Zapisanie np. równania : $(a+2)^3 = 16 + a(a+1)(a+2)$ gdzie a jest długością najkrótszej krawędzi prostopadłościanu	1,5
	Rozwiązanie równania : $a = 2$ lub $a = -1 + \sqrt{5}$ lub $a = -1 - \sqrt{5}$	1,5
	Podanie rozwiązania zadania: $2 \text{ dm}, 3 \text{ dm}, 4 \text{ dm}$ lub $-1 + \sqrt{5} \text{ dm}, \sqrt{5} \text{ dm}, \sqrt{5} + 1 \text{ dm}$	1
	Sprawdzenie rozwiązania zadania i odpowiedź	1
2	Dowód , że czworokąt XYZT jest prostokątem	2
	Wyznaczenie długości wysokości rombu : $2\sqrt{3}$	1
	Wyznaczenie miary kąta między przekątnymi prostokąta XYZT: 60°	1
	Obliczenie pola prostokąta : $3\sqrt{3}$	2
3	Zapisanie warunków zadania: $\begin{cases} a+b+2c \leq 120 \\ 0,5(a+b)h = 800 \end{cases}$ gdzie a, b są długościami podstaw, c - długością ramienia, h - długością wysokości trapezu	1
	Wyrażenie długości wysokości h trapezu przy pomocy długości jego ramienia c : $h = \frac{\sqrt{3}}{2} c$	1
	Zapisanie sumy długości podstaw przy pomocy c : $a + b = \frac{3200\sqrt{3}}{3c}$	1
	Zapisanie nierówności dotyczącej obwodu przy pomocy c : $\frac{3200\sqrt{3}}{3c} + 2c \leq 120$	1
	Rozwiązanie nierówności	1
	Odpowiedź wraz z uzasadnieniem, że nie można wytyczyć działki	1
4	Rozpatrzenie czterech przypadków dla ciągu (m, mq, mq^2) gdzie $m, q \in \mathbb{C}$ ($m < 0$ i $q > 0$) lub ($m < 0$ i $q < 0$) lub ($m > 0$ i $q > 0$) lub ($m > 0$ i $q < 0$) i ustalenie który z wyrazów jest najmniejszy	1
	Zapisanie kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego	0,5
	Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi : $mq = \frac{m + mq^2 + 9}{2}$ i przekształcenie tego równania do postaci : $(q - 1)^2 = \frac{-9}{m}$ oraz wyciągnięcie wniosku co do znaku liczby m : m jest ujemne	2
	Wypisanie możliwych wartości dla m uwzględniając warunki zadania: $m = -1$ lub $m = -9$	1
	Obliczenie q dla $m = -1$: $q = 4$ lub $q = -2$	0,5
	Obliczenie q dla $m = -9$: $q = 2$	0,5
	Udzielenie odpowiedzi: -1, -4, -16; -9, -18, -36; -1, 2, -4;	0,5
5	Podanie założeń: $x > 0$ i $x \neq 1$	0,5
	Skorzystanie z twierdzenia o zmianie podstawy logarytmu	1
	Zapisanie danego równania w postaci układu (koniunkcji): $ 2 - x = 1$ i $x > 0$ i $x \neq 1$	0,5
	Rozwiązanie równania $ 2 - x = 1$: $x = 1$ lub $x = 3$	1
	Uwzględnienie założenia i podanie rozwiązania danego równania; $x = 3$	0,5

	Wyznaczenie a, b dla których 3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu; $a = 3, b = 9$.	2
	Wyznaczenie trzeciego pierwiastka wielomianu; -1	0,5

Za poprawne rozwiązanie zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania, należy przyznać maksymalną liczbę punktów. Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie metodą inną i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważnie do wymienionych w schemacie. Można przyznawać połówki punktów.