

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO, II i III Technikum - zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 02.04.2005 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie:

$$xy = 20 - 3x + y$$

Zadanie 2 (6 pkt)

Pewien wielomian jest podzielny przez $x - 2$. Przy dzieleniu tego wielomianu przez $x - 1$ otrzymujemy resztę 2, zaś przy dzieleniu przez $x - 3$ resztę - 4.

Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Zadanie 3 (6 pkt)

W trapezie ABCD dane są kąty przy podstawie dolnej, takie, że $|\angle DAB| = 45^\circ$, $|\angle ABC| = 60^\circ$.

Przekątna BD ma długość $6\sqrt{2}$ cm i jest prostopadła do boku AD.

Oblicz obwód tego trapezu.

Zadanie 4 (6 pkt)

Dla jakich $\alpha \in [0, 2\pi]$ rozwiązaniem układu:

$$\begin{cases} (\sin \alpha - 1)x + y = 1 \\ (-2 \sin \alpha)x + (2 \sin \alpha + 1)y = \sin \alpha \end{cases}$$

jest dokładnie jedna para liczb ujemnych?

Zadanie 5 (6 pkt)

Jeden z wierzchołków trójkąta równobocznego jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 - 4x$ a pozostałe należą do paraboli.

Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II LO, II i III Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Wyznaczenie niewiadomej np. x z równania: $x = \frac{y+20}{y+3}$	1
	Zapisanie ułamka w postaci sumy: $x = 1 + \frac{17}{y+3}$	2
	Zapisanie wartości y , dla których ułamek $\frac{17}{y+3}$ przyjmuje wartości całkowite: - 20, - 4, - 2, 14	1
	Obliczenie wartości x dla odpowiednich wartości y .	1
	Udzielenie odpowiedzi: pary liczb (0, - 20), (-16, - 4), (18, - 2), (2, 14) spełniają równanie.	1
2	Zapisanie faktu, że reszta z dzielenia danego wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)(x-2)(x-3)$ jest wielomianem co najwyżej drugiego stopnia lub wielomianem zerowym $W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$	1
	Znajomość twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - r$	0,5
	Zapisanie układu równań $\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = -4 \end{cases}$	1,5
	Rozwiązanie układu równań: $a = -1, b = 1, c = 2$	2
	Zapisanie szukanej reszty: $-x^2 + x + 2$	1
3	Rysunek wraz z oznaczeniami	1
	Wyznaczenie długości ramienia AD: $6\sqrt{2}$ cm.	1
	Obliczenie długości podstawy dolnej trapezu z trójkąta prostokątnego ABD: 12 cm	1
	Obliczenie długości wysokości DE trapezu: 6 cm	0,5
	Obliczenie długości ramienia BC: $4\sqrt{3}$	0,5
	Obliczenie długości podstawy górnej: $2(3 - \sqrt{3})$ cm	1,5
	Obliczenie obwodu trapezu: $2(3\sqrt{2} + \sqrt{3} + 9)$	0,5
4	Obliczenie wyznaczników: $W = 2(\sin \alpha + 1)(\sin \alpha - \frac{1}{2})$, $W_x = \sin \alpha + 1$, $W_y = \sin \alpha (\sin \alpha + 1)$	1,5
	Podanie warunku, dla którego układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie: $W \neq 0$ tzn. dla $\alpha \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \right\}$	2
	Obliczenie x, y : $x = \frac{1}{2(\sin \alpha - \frac{1}{2})}$, $y = \frac{\sin \alpha}{2(\sin \alpha - \frac{1}{2})}$	0,5
	Sformułowanie warunku, dla którego x i y są ujemne: $\sin \alpha - \frac{1}{2} < 0$ i $\sin \alpha > 0$	0,5
	Określenie zbioru rozwiązań tego układu nierówności: $\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$	1

	Udzielenie odpowiedzi: Rozwiązaniem układu jest dokładnie jedna para liczb ujemnych gdy $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$	0,5
5	Narysowanie wykresu funkcji kwadratowej (wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C i współrzędnych punktów przecięcia się wykresu funkcji z osiami)	1
	Zapisanie współrzędnych pozostałych wierzchołków trójkąta uwzględniając, że prosta $x = 2$ jest osią symetrii wykresu: $A = (2 + x, x^2 - 4)$, $B = (2 - x, x^2 - 4)$ gdzie $x > 0$	2
	Zapisanie równania $\sqrt{x^2 + x^4} = 2x$ wykorzystując, że długość boku BC równa się $2x$	1
	Rozwiązanie równania: $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$ i $x > 0$	1
	Zapisanie współrzędnych punktów A i B: $A = (2 + \sqrt{3}, -1)$, $B = (2 - \sqrt{3}, -1)$	1
	Druka wersja kryteriów dla zadania 5	
5	Narysowanie wykresu funkcji kwadratowej (wyznaczenie współrzędnych wierzchołka i współrzędnych punktów przecięcia się wykresu funkcji z osiami)	1
	Zapisanie równania prostej BC, gdzie C jest wierzchołkiem paraboli (kąt nachylenia prostej BC do osi OX ma miarę 60°): $y = \sqrt{3}x - (4 + 2\sqrt{3})$	2
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = \sqrt{3}x - (4 + 2\sqrt{3}) \end{cases}$	0,5
	Rozwiązanie układu równań: $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ lub $x_2 = 2$ $y_1 = -1$ $y_2 = -4$	2
	Zapisanie współrzędnych punktów A i B: $A = (2 + \sqrt{3}, -1)$, $B = (2 - \sqrt{3}, -1)$	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.