

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO i II, III Technikum- zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 04.03.2006 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zad.1 (6 pkt)

Udowodnij, że $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3}$

Zad. 2 (6 pkt)

Wykaż, że dla pierwiastków x_1, x_2, x_3 równania $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ prawdziwe są wzory: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$

Zad 3 (6 pkt)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 1)$ jest równa 2, a reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - 3)$ jest równa 5. Podaj wielomian $R(x)$, który jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $(x^2 - 4x + 3)$.

Zad. 4 (6 pkt)

Trójkąt o bokach a, b, c został rozcięty na romb i dwa trójkąty. Oblicz długości boków tych figur.

Zad.5 (6 pkt)

Na kole o promieniu $r=1$ został opisany trójkąt prostokątny o przyprostokątnych x, y . Napisz wzór funkcji opisującej zależność y od x i narysuj wykres otrzymanej funkcji.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy I i LO i II , III Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie ułamka w postaci $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}$	0,5
	Zapisanie ułamka w postaci $\frac{\sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha(1 - \sin^4 \alpha) + \cos^2 \alpha(1 - \cos^4 \alpha)}$	2
	Zapisanie licznika ułamka w postaci $2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$	1
	Zapisanie mianownika ułamka w postaci $3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$	2
	Obliczenie ilorazu: $\frac{2}{3}$	0,5
2	Zapisanie lewej strony równania w postaci $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$	1
	Przekształcenie postaci iloczynowej do postaci $a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - (x_1x_2x_3)]$	2
	Zapisanie równań : $-a(x_1 + x_2 + x_3) = b$ oraz $-ax_1x_2x_3 = d$	2
	Przekształcenie równań do postaci : $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$ i $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$	1
3	Znajomość twierdzenia o reszcie i zapisanie układu równań $W(1) = 2$ i $W(3) = 5$	1,5
	Zapisanie wielomianu $x^2 - 4x + 3$ w postaci iloczynowej $(x - 3)(x - 1)$	1
	Zapisanie wielomianu $W(x)$ w postaci $W(x) = (x - 3)(x - 1)Q(x) + (ax + b)$	1
	Zapisanie układu równań $\begin{cases} 3a + b = 5 \\ a + b = 2 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu równań : $a = 1\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$	0,5
	Zapisanie reszty $R(x) = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	1
4	Analiza zadania, rysunek.	0,5
	Zauważenie i uzasadnienie, że powstałe trójkąty są podobne	1
	Zapisanie proporcji $\frac{m}{c - m} = \frac{b - m}{m} = \frac{ CD }{ DB }$, gdzie m to długość boku rombu , a D to wierzchołek rombu należący do boku BC	1
	Wyznaczenie m : $m = \frac{bc}{b + c}$	1
	Wyznaczenie długości boków $(c - m)$ i $(b - m)$: $\frac{c^2}{b + c}, \frac{b^2}{b + c}$	1
	Zapisanie układu równań $\begin{cases} \frac{ CD }{ DB } = \frac{b}{c} \\ CD + DB = a \end{cases}$	0,5
	Rozwiązanie układu równań: $ CD = \frac{ab}{b + c}, DB = \frac{ac}{b + c}$	1
5	Analiza zadania, rysunek	0,5

	Zapisanie długości przeciwprostokątnej w postaci $(x - r + y - r)$ czyli $(x + y - 2)$	0,5
	Zapisanie pola trójkąta w dwóch postaciach: $P_{ABC} = \frac{1}{2}xy$, $P_{ABC} = \frac{1}{2}(2x + 2y - 2)$	1
	Zapisanie równania $xy = 2x + 2y - 2$	0,5
	Wyznaczenie y : $y = \frac{2x-2}{x-2}$ dla $x \neq 2$	1
	Zapisanie przepisu funkcji w postaci $y = 2 + \frac{2}{x-2}$ i wyznaczenie jej dziedziny $D_f = (2, \infty)$	1,5
	Sporządzenie wykresu funkcji	1

Za poprawne rozwiązanie zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania, należy przyznać maksymalną liczbę punktów. Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie metodą inną i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważnie do wymienionych w schemacie. Można przyznawać połówki punktów.