

**Międzyszkolne Zawody Matematyczne**  
**Klasa II LO i II, III Technikum– zakres podstawowy**  
**Etap wojewódzki – 10.03.2007 rok**  
**Czas rozwiązywania zadań – 150 minut**

**Zadanie 1 (6 pkt)**

Znajdź funkcję liniową, która spełnia dla każdego  $x \in R$  następujące warunki:

$$f(-3x) = -3f(x) + 12$$

$$f(x-1) = 5 + f(x)$$

**Zadanie 2 (6 pkt)**

Dana jest funkcja  $f(x) = \cos x + x^2 - 4$ .

- a) Oblicz wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $2\pi$
- b) Wyznacz współrzędne punktu przecięcia się wykresu funkcji z osią OY,
- c) Określ znak liczby  $f(2)$
- d) Zbadaj ile miejsc zerowych ma funkcja  $f$ . Odpowiedź uzasadnij.  
( Skorzystaj z interpretacji geometrycznej równania  $\cos x = -x^2 + 4$  )

**Zadanie 3 (6 pkt)**

Właściciel księgarni sprzedaje miesięcznie 20 egzemplarzy danej książki w cenie 40 złotych. Obniżka ceny książki o 1 złotych powoduje przeciętnie zwiększenie sprzedaży o jeden egzemplarz miesięcznie. Jaką cenę książki powinien ustalić właściciel księgarni, aby jego utarg był największy?

**Zadanie 4 (6 pkt)**

Długość ramienia trapezu jest równa  $m$ , a odległość środka przeciwległego ramienia od niego jest równa  $q$ . Znajdź pole trapezu, wiedząc, że odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw i ma długość równą średniej arytmetycznej ich długości.

**Zadanie 5 (6 pkt)**

Dany jest wielomian  $W(x) = x^4 + ax^3 + 5x^2 - 5x - b$ .

Znajdź dodatnie współczynniki  $a, b$ , wiedząc, że dwa różne pierwiastki trójmianu  $y = x^2 + ax + b$  są również pierwiastkami wielomianu  $W(x)$ .

Dla wyznaczonych dodatnich wartości  $a, b$  rozwiąż równanie  $W(x) = 0$ .

**Życzymy powodzenia**

**Kryteria oceniania dla klasy II LO i II, III Technikum – zakres podstawowy**

| Nr zad | Wykonana czynność                                                                                                                                                                                            | Pkt |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1      | Analiza zadania: wykresem funkcji jest prosta postaci $y = ax + b$                                                                                                                                           | 0,5 |
|        | Wyznaczenie współrzędnych pierwszego punktu należącego do prostej : $A = (0,3)$                                                                                                                              | 2   |
|        | Wyznaczenie współrzędnych drugiego punktu należącego do prostej: $B = (-1, 8)$                                                                                                                               | 2   |
|        | Napisanie równania prostej : $y = -5x + 3$                                                                                                                                                                   | 1,5 |
| 2      | Obliczenie wartości funkcji dla argumentu $2\pi$ : $f(2\pi) = 4\pi^2 - 3$                                                                                                                                    | 0,5 |
|        | Obliczenie wartości funkcji dla $x = 0$ : $f(0) = -3$                                                                                                                                                        | 0,5 |
|        | Zapisanie wartości funkcji dla $x = 2$ : $f(2) = \cos 2$                                                                                                                                                     | 0,5 |
|        | Określenie znaku liczby $f(2)$ przy czym zwrócenie uwagi na to, że $2 > \frac{\pi}{2}$ i na monotoniczność funkcji w przedziale $(0, \pi)$ do którego należą liczby 2 i $\frac{\pi}{2}$ : $f(2)$ jest ujemne | 1,5 |
|        | Zapisanie równania $\cos x + x^2 - 4 = 0$ , i przekształcenie go do postaci $\cos x = -x^2 + 4$                                                                                                              | 1   |
|        | Sporządzenie szkiców wykresów funkcji $y = \cos x$ i $y = -x^2 + 4$ i odczytanie liczby wspólnych punktów wykresu: funkcja posiada dwa miejsca zerowe                                                        | 2   |
| 3      | Analiza zadania: $x$ - kwota o którą obniżono cenę książki, $40-x$ cena książki po obniżce, $20+x$ – liczba książek sprzedanych po obniżonej cenie                                                           | 2   |
|        | Zapisanie funkcji pozwalającej obliczyć kwotę otrzymaną z miesięcznej sprzedaży książek o obniżonej cenie: $y = (20 + x)(40 - x)$ i wyznaczenie jej dziedziny: $D_f = (0,40)$                                | 2   |
|        | Wyznaczenie argumentu dla którego funkcja przyjmuje maksimum: $f_{\max}$ dla $x = 10$                                                                                                                        | 1,5 |
|        | Obliczenie ceny książki : 30 złotych                                                                                                                                                                         | 0,5 |
| 4      | Analiza zadania, rysunek z oznaczeniami np. $AB$ , $CD$ podstawy trapezu, $m$ - długość ramienia $AD$ , $E$ - środek ramienia $AD$ , $F$ - środek ramienia $BC$                                              | 1   |
|        | Uzasadnienie podobieństwa trójkątów $AHD$ , $EFG$ gdzie $H$ to spodek wysokości trapezu poprowadzonej z wierzchołka $D$ , a $FG$ to odcinek o długości $q$ .                                                 | 1   |
|        | Zapisanie proporcji: $\frac{ AD }{ DH } = \frac{ EF }{ FG }$ lub $\frac{m}{ DH } = \frac{ EF }{q} = \frac{m}{h} = \frac{ EF }{q}$ , gdzie $h$ to długość wysokości trapezu.                                  | 1,5 |
|        | Zapisanie związku na podstawie twierdzenia o odcinku łączącym środki nierównoległych boków trapezu: $ EF  = \frac{1}{2}( AB  +  CD )$                                                                        | 1,5 |
|        | Obliczenie pola trapezu: $P = mq$                                                                                                                                                                            | 1   |
| 5      | Wykonanie dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $((x^2 + ax + b) :$<br>$x^2 + 5 - b$ , $R = (-5 - 5a + ab)x + b^2 - 6b$                                                                                 | 2   |
|        | Zapisanie równania : $(-5 - 5a + ab)x + b^2 - 6b = 0$                                                                                                                                                        | 0,5 |

|  |                                                                                                                                                                                     |     |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | Zapisanie układu równań : $\begin{cases} -5 - 5a + ab = 0 \\ b^2 - 6b = 0 \end{cases}$                                                                                              | 0,5 |
|  | Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases}$ i dokonanie wyboru rozwiązania spełniającego warunki zadania. | 1   |
|  | Zapisanie równania $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$ lub $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 1) = 0$                                                                                               | 1   |
|  | Rozwiązanie równania: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -3, x_4 = -2$                                                                                                                       | 1   |

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.