

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO, II i III Technikum - zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 15.03.2008 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi OX . Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta

Zadanie 2 (6 pkt)

Wyznacz długości wszystkich wysokości trójkąta prostokątnego, gdy długość promienia okręgu opisanego na nim i wpisanego w niego są równe odpowiednio 5 cm i 2 cm.

Zadanie 3 (6 pkt)

Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbb{R}$) nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą x ?

$$\frac{(m-2)x+8m}{x^2+1} \leq 1$$

Zadanie 4 (6 pkt)

$$y = \begin{cases} \cos 2x & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \\ 2 - \sin 2x & x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right) \end{cases}$$

Narysuj wykres funkcji

i podaj jej zbiór wartości. Wyznacz zbiór argumentów dla których wartość funkcji jest równa 1, oraz określ przedziały monotoniczności funkcji.

Zadanie 5 (6 pkt)

Dla jakich $m, n \in \mathbb{R}$ zbiorem rozwiązań nierówności $2x^3 + mx^2 + nx + 1 < 0$ jest zbiór

$$\left(-\infty, \frac{5}{2} \right) \cup (2, 3) ?$$

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II LO, II i III Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Rysunek wraz z oznaczeniami	0,5
	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $C = (3,9)$	1
	Zapisanie równania prostej AC: $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9$	1
	Zapisanie układu równań w celu wyznaczenia współrzędnych punktu A: $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 9 \\ y = x^2 + 6x \end{cases}$	1
	Wyznaczenie współrzędnych punktu A: $A(3 - \sqrt{3}, 6)$	2
	Wyznaczenie współrzędnych punktu B: $B(3 + \sqrt{3}, 6)$	0,5
2	Rysunek i analiza zadania: $R = 5$ cm, $r = 2$ cm, a i b to długości przyprostokątnych, c długość przeciwprostokątnej	0,5
	Zauważenie zależności: $c = 2R$, $a - r + b - r = c$, $a^2 + b^2 = c^2$, $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b)r$	1,5
	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} c = 10 \\ a + b = 14 \\ a^2 + b^2 = 100 \\ ab = (a + b + 10)2 \end{cases}$	2
	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} c = 10 \\ a = 6 \\ b = 8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} c = 10 \\ a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$	1,5
	Obliczenie długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego: $h = 4,8$ cm	0,5
3	Założenie: $x \in R$	0,5
	Zapisanie nierówności w postaci: $x^2 - 11x + 18 < 0$	1,5
	Zapisanie nierówności w postaci: $(x - 2)(x - 9) < 0$	0,5
	Zapisanie warunków: $a < 0$ i $\Delta < 0$	1
	Zapisanie warunków w postaci: $\begin{cases} m \in R \\ (m^2 - 4)m < 0 \end{cases}$	1
	Wyznaczenie m : $m \in (-3, 0)$	1,5
4	Wykres funkcji	2,5
	Określenie zbioru wartości funkcji: $ZW = [0, +\infty)$	0,5
	Określenie zbioru argumentów dla których funkcja przyjmuje wartość 1: $\left\{ \frac{-\sqrt{14} \pm \sqrt{14}}{2}, 0, \frac{\sqrt{14} \pm \sqrt{14}}{2} \right\}$	1,5
	Wyznaczenie przedziałów monotoniczności:	1,5

5	Przekształcenie wielomianu do postaci: $\left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{n^2}{2}x - 5x + \frac{n}{2} \right)$	0,5
	Zauważenie, że $\frac{5}{2}$ i $a = 2$,	1,5
	Zapisanie wielomianu w postaci: korzystając ze znajomości twierdzenia o podzielności wielomianu przez dwumian $x - a$	1
	Zapisanie wielomianu w postaci:	2
	Obliczenie wartości parametrów m i n : $m = -5$, $n = 30$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.