

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa II LO, II i III Technikum - zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 21.03.2009 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie:

$$xy = 20 - 3x + y$$

Zadanie 2 (6 pkt)

Pewien wielomian jest podzielny przez $x - 2$. Przy dzieleniu tego wielomianu przez $x - 1$ otrzymujemy resztę 2, zaś przy dzieleniu przez $x - 3$ resztę - 4.

Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

Zadanie 3 (6 pkt)

W trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ i długość podstawy i wysokości są odpowiednio równe: $|AB| = 12$, $|CD| = 18$ wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego wierzchołki należą do podstawy, zaś dwa pozostałe do ramion tego trójkąta. Wiadomo też, że przekątne tego prostokąta są równoległe do odpowiednich ramion trójkąta. Wyznacz długości boków prostokąta oraz sinus kąta nachylenia jego przekątnej do krótszego boku.

Zadanie 4 (6 pkt)

Sklep sprzedając jabłka po 3 złote za kilogram, dziennie sprzedawał 400 kilogramów.

Zauważono, że przy obniżce ceny jabłek o każde 10 groszy sprzedaż rośnie o 100 kilogramów.

Pracownicy sklepu kupują jabłka od sadownika po 1,20 zł za kilogram i płacą inne koszty (magazynowanie, transport itp.) przypadające na 1 kilogram jabłek w kwocie 0,20 zł. Przy jakiej cenie jabłek ich dzienna sprzedaż przyniesie największy zysk?

Zadanie 5 (6 pkt)

Dane są punkty $A = (0, 1)$, $B = (4, 3)$ i $M = (3, 5)$. Na prostej l przechodzącej przez punkt M i równoległej do prostej AB znajdź punkt C równo odległy od punktów A i B . Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy II LO, II i III Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Wyznaczenie niewiadomej np. x z równania: $x = \frac{y+20}{y+3}$	1
	Zapisanie ułamka w postaci sumy: $x = 1 + \frac{17}{y+3}$	2
	Zapisanie wartości y , dla których ułamek $\frac{17}{y+3}$ przyjmuje wartości całkowite: - 20, - 4, - 2, 14	1
	Obliczenie wartości x dla odpowiednich wartości y .	1
	Udzielenie odpowiedzi: pary liczb (0, - 20), (- 16, - 4), (18, - 2), (2, 14) spełniają równanie.	1
2	Zapisanie faktu, że reszta z dzielenia danego wielomianu $W(x)$ przez $(x-1)(x-2)(x-3)$ jest wielomianem co najwyżej drugiego stopnia $W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$	1
	Znajomość twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - r$	0,5
	Zapisanie układu równań $\begin{cases} 4a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = -4 \end{cases}$	1,5
	Rozwiązanie układu równań: $a = -1, b = 1, c = 2$	2
	Zapisanie szukanej reszty: $-x^2 + x + 2$	1
3	Rysunek wraz z oznaczeniami, np. prostokąt KLMN w którym $ KL = a, LM = b$	1
	Zapisanie równania $\frac{b}{6 - \frac{a}{2}} = 3$ wykorzystując funkcję trygonometryczną lub podobieństwo trójkątów.	1,5
	Przekształcenie równania do postaci: $b = 18 - \frac{3}{2}a$	0,5
	Zauważenie, że $ AK = KL = LB = a$ na podstawie informacji o przekątnych prostokąta.	1
	Zapisanie zależności: $ AB = 3a$ i obliczenie a : $a = 4$	0,5
	Obliczenie b : $b = 12$	0,5
	Obliczenie sinusa kąta nachylenia przekątnej prostokąta do jego krótszego boku: $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$	1
4	Analiza zadania: n – liczba obniżek ceny jabłek po 10 groszy, $(3 - n \cdot 0,1)zł$ - cena 1 kilograma jabłek po „ n ” obniżkach, $(400 + n \cdot 100)$ - ilość sprzedanych jabłek w ciągu dnia, $(400 + n \cdot 100) \cdot 1,40$ - koszty zakupu i transportu	2
	Zapisanie funkcji określającej dzienny zysk: $f(n) = (400 + n \cdot 100)(3 - 0,1n) - (400 + n \cdot 100) \cdot 1,40, n \in N$	1
	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci $f(n) = -10n^2 + 120n + 640$	1
	Obliczenie „ n ” dla którego funkcja przyjmuje wartość największą: $n = 6$	1
	Obliczenie ceny jabłek: 2, 40 zł	1

5	Analiza zadania: zauważenie, że punkt C jest częścią wspólną symetralnej odcinka AB i prostej l.	0,5
	Zapisanie równania prostej AB: $y = \frac{1}{2}x + 1$ i równania prostej l: $y = \frac{1}{2}x + 3,5$	1
	Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AB: $S = (2,2)$	0,5
	Zapisanie równania prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt S: $y = -2x + 6$	1
	Rozwiązanie układu równań w celu wyznaczenia współrzędnych punktu C: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3,5 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ C (1,4]	1
	Stwierdzenie z uzasadnieniem na przykład na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym: $ AC = BC = \sqrt{10}$, $ AB = \sqrt{20}$, a więc $ AC ^2 + BC ^2 = AB ^2$	1,5
	Obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R = \sqrt{5}$	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.