

**Międzyszkolne Zawody Matematyczne**  
**Klasa IV, V - profil ogólny**  
**Etap wojewódzki – 17.04.2004 rok**  
*Czas rozwiązywania zadań 150 minut*

**Zad 1 (6 pkt)**

Jeden z wierzchołków trójkąta równobocznego jest wierzchołkiem paraboli o równaniu  $y = x^2 - 4x$ , a pozostałe dwa wierzchołki leżą na jej ramionach. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tego trójkąta dookoła prostej o równaniu  $y + 4 = 0$

**Zad 2 ( 6 pkt)**

Ze zbioru wszystkich wierzchołków  $n$ -kąta foremnego losujemy trzy różne wierzchołki i zakładamy, że wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne. Wiedząc, że liczba przekątnych tego wielokąta wynosi dziewięć, oblicz prawdopodobieństwo, że wybrane losowo trzy wierzchołki wyznaczają trójkąt równoramienny.

**Zad 3 (6 pkt)**

Rozwiąż nierówność:

$$2^{1 + 2\log_2 \cos x} - 0,75 > 9^{0,5 + \log_3 \sin x}, \quad x \in \langle 0, \Pi \rangle$$

**Zad 4 ( 6 pkt)**

Niech  $a, b, c$  będą długościami boków trójkąta, leżącymi naprzeciw kątów o miarach odpowiednio  $\alpha, \beta, \gamma$  i niech  $a^2 - (b - c)^2$  będzie polem tego trójkąta. Oblicz sinus  $\alpha$ .

**Zad 5 ( 6 pkt)**

Wyznacz miary kątów trójkąta prostokątnego, w którym stosunek długości promienia okręgu wpisanego do długości promienia okręgu opisanego jest największy.

**Życzymy powodzenia**

### Kryteria oceniania dla klasy IV LO i Technikum i V Technikum – zakres podstawowy

| Nr zad | Wykonana czynność                                                                                                                                                                                                                        | Pkt |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1      | Analiza zadania, rysunek                                                                                                                                                                                                                 | 1   |
|        | Obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli: $A(2, -4)$                                                                                                                                                                                | 1   |
|        | Zapisanie współrzędnych pozostałych wierzchołków trójkąta:<br>$B(2 - a, a^2 - 4)$ , $C(2 + a, a^2 - 4)$ gdzie $a \in \mathbb{R}$ i jest równe połowie długości boku trójkąta równobocznego                                               | 1   |
|        | Obliczenie wartości $a$ : $a = \sqrt{3}$                                                                                                                                                                                                 | 1   |
|        | Zapisanie objętości bryły: $V = V_{\text{walca}} - 2 V_{\text{stożka}}$                                                                                                                                                                  | 1,5 |
|        | Obliczenie objętości bryły: $V = 12 \sqrt{3} \pi$                                                                                                                                                                                        | 0,5 |
| 2      | Wykorzystanie wzoru na liczbę przekątnych w $n$ -kącie: $\frac{1}{2}n(n-3)$ , do wyznaczenia liczby boków: $n = 6$                                                                                                                       | 1,5 |
|        | Zapisanie przestrzeni zdarzeń elementarnych i obliczenie jej mocy:<br>$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{A, B, C, D, E, F\}\}, \Omega = 20$                                               | 2   |
|        | Zapisanie zdarzenia losowego i obliczenie jego mocy:<br>$A = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} : \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{A, B, C, D, E, F\} \text{ i odległość pomiędzy co najmniej dwoma punktami jest taka sama}\}, A = 8$ | 2   |
|        | Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A) = \frac{2}{5}$                                                                                                                                                                                       | 0,5 |
| 3      | Podanie założenia: $\sin x > 0$ i $\cos x > 0 : x \in (0, \frac{\pi}{2})$                                                                                                                                                                | 1   |
|        | Zapisanie potęg przy pomocy iloczynu potęg o tej samej podstawie                                                                                                                                                                         | 2   |
|        | Skorzystanie ze wzoru $a^{\log_a b} = b$ i zapisanie nierówności w postaci<br>$2\cos^2 x - \frac{3}{4} > 3\sin^2 x$                                                                                                                      | 1   |
|        | Rozwiązanie nierówności: $x \in (0, \frac{\pi}{6})$                                                                                                                                                                                      | 2   |
| 4      | Analiza zadania, rysunek                                                                                                                                                                                                                 | 0,5 |
|        | Zapisanie wzoru na pole trójkąta przy pomocy długości boków $b, c$ i $\sin \alpha$ :<br>$P = 0,5 bc \sin \alpha$                                                                                                                         | 0,5 |
|        | Wykorzystanie informacji o polu z treści zadania do zapisania równania:<br>$a^2 - (b - c)^2 = 0,5 bc \sin \alpha$                                                                                                                        | 1   |
|        | Zastosowanie Twierdzenia cosinusów do zapisania kwadratu długości boku $a$ :<br>$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$                                                                                                                      | 0,5 |
|        | Wykorzystanie otrzymanych równań do zapisania równania:<br>$bc(-2 \cos \alpha + 2 - 0,5 \sin \alpha) = 0$                                                                                                                                | 1   |
|        | Rozwiązanie układu równań:<br>$-2 \cos \alpha + 2 - 0,5 \sin \alpha = 0$<br>$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$                                                                                                                          | 2   |
|        | Wybór odpowiedniego rozwiązania i odpowiedź $\sin \alpha = \frac{8}{17}$                                                                                                                                                                 | 0,5 |
| 5      | Rysunek wraz z oznaczeniami                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|        | Zapisanie, że długość promienia okręgu opisanego jest połową długości przeciwprostokątnej                                                                                                                                                | 0,5 |

|  |                                                                                                                                           |     |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | Zapisanie długości promienia okręgu opisanego przy pomocy długości przyprostokątnej $b$ i kąta $\alpha$                                   | 0,5 |
|  | Zapisanie długości promienia okręgu wpisanego w zależności od $\frac{\alpha}{2}$ i przy pomocy długości przyprostokątnej $b$              | 0,5 |
|  | Zapisanie ilorazu $\frac{r}{R}$ w postaci $\frac{2\cos\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ | 0,5 |
|  | Przekształcenie ilorazu do postaci $\sin \alpha + \cos \alpha - 1$                                                                        | 1,5 |
|  | Wyznaczenie maksimum dla funkcji $f(\alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha - 1$                                                              | 1,5 |
|  | Udzielenie odpowiedzi: stosunek promieni jest największy gdy miarą kąta ostrego jest $\frac{\pi}{4}$                                      | 0,5 |

Za poprawne rozwiązanie zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania, należy przyznać maksymalną liczbę punktów. Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie metodą inną i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważnie do wymienionych w schemacie. Można przyznawać połówki punktów.