

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa IV technikum - profil ogólny
Etap wojewódzki – 02.04.2005 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Prosta l równoległa do boku AB trójkąta ABC dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz, w jakim stosunku prosta l dzieli bok AC ?

Zadanie 2 (6 pkt)

Rozwiąż równanie:

$$2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$$

Zadanie 3 (6 pkt)

Na półce stoi 25 podręczników, przy czym n spośród nich to podręczniki do matematyki. Wybieramy losowo dwa podręczniki. Prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden z nich nie jest podręcznikiem do matematyki jest równe 0,98. Oblicz, ile było podręczników do matematyki na półce.

Zadanie 4 (6 pkt)

Niech A będzie przedziałem otwartym, w którym funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ jest

rosnąca, natomiast B będzie dziedziną funkcji określonej wzorem $g(x) = \sqrt{\log_{0,5} \frac{x}{x^2 - 1}}$

Wyznacz $A \cap B$.

Zadanie 5 (6 pkt)

Pole podstawy stożka, pole powierzchni kuli wpisanej w ten stożek i pole powierzchni bocznej stożka w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.

Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α .

Wyznacz cosinus kąt α wiedząc, że prawdziwa jest równość: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ gdy $\sin \alpha \neq 0$

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy IV, V– profil ogólny

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Rysunek z oznaczeniami	0,5
	Zauważenie, że trójkąty ABC i A'B'C gdzie A' i B' są punktami przecięcia się prostej l odpowiednio z bokiem AC i BC są podobne	
	Zapisanie, że stosunek pól trójkątów ABC i A'B'C jest równy kwadratowi skali podobieństwa czyli 2	1
	Obliczenie skali podobieństwa tych trójkątów: $k = \sqrt{2}$	0,5
	Zapisanie równania: $\frac{ A'C + A'A }{ A'C } = \sqrt{2}$	1
	Przekształcenie równania do postaci: $1 + \frac{ A'A }{ A'C } = \sqrt{2}$	2
	Obliczenie, w jakim stosunku prosta dzieli bok AC: $\sqrt{2} - 1$	1
2	Założenie: $x^2 - 4 \geq 0$, czyli $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$	0,5
	Zapisanie równania pomocniczego $z^2 - \frac{5}{2}z - 6 = 0$ gdzie $z = (\sqrt{2})^{x + \sqrt{x^2 - 4}}$	1
	Rozwiązanie równania: $z_1 = -\frac{3}{4}$, $z_2 = 4$	1
	Zapisanie alternatywy równań: $(\sqrt{2})^{x + \sqrt{x^2 - 4}} = -\frac{3}{4}$ lub $(\sqrt{2})^{x + \sqrt{x^2 - 4}} = 4$	0,5
	Rozwiązanie alternatywy równań: $(\sqrt{2})^{x + \sqrt{x^2 - 4}} = -\frac{3}{4}$ lub $(\sqrt{2})^{x + \sqrt{x^2 - 4}} = 4$: $x = \frac{5}{2}$	2,5
	Udzielenie odpowiedzi: rozwiązaniem równania jest liczba $x = \frac{5}{2}$	0,5
3	Opisanie przestrzeni zdarzeń elementarnych	0,5
	Obliczenie mocy przestrzeni zdarzeń elementarnych	0,5
	Opisanie zdarzenia A' - losowo dwa wybrane podręczniki są podręcznikami do matematyki	1
	Obliczenie $P(A')$: 0,02	1
	Zapisanie równania $n(n-1): 600 = 0,02$ i $n \in \mathbb{N}$ i $n < 26$	1
	Rozwiązanie równania z uwzględnieniem założenia; $n = 4$	2
4	Określenie dziedziny funkcji: $D_f = \mathbb{R}$	0,5
	Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$	1
	Wyznaczenie zbioru A : $A = (0, +\infty)$	0,5
	Sformułowanie warunków dla określenia dziedziny funkcji: $x^2 - 1 \neq 0$ i $\log_{0,5} \frac{x}{x^2 - 1} \geq 0$ i $\frac{x}{x^2 - 1} > 0$	1,5
	Wyznaczenie zbioru B: $B = [\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0) \cup [\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty)$	2
	Wyznaczenie zbioru $A \cap B$: $[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty)$	0,5

5	Rysunek wraz z oznaczeniami	0,5
	Zapisanie równania: $4\pi r^2 - \pi R^2 = \pi Rl - 4\pi r^2$ gdzie R jest długością promienia podstawy stożka, r długością promienia kuli a l długością tworzącej stożka	1
	Przekształcenie równania do postaci: $8\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 + \frac{l}{R}$	0,5
	Zapisanie równania w postaci: $8tg^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{\cos\alpha}$	1
	Przekształcenie równania do postaci: $9\cos^2\alpha - 6\cos\alpha - 1 = 0$	2
	Rozwiązanie równania i udzielenie odpowiedzi: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów