

**Międzyszkolne Zawody Matematyczne**  
**Klasa III LO i IV Technikum – zakres podstawowy**  
**Etap wojewódzki – 04.03.2006 rok**  
*Czas rozwiązywania zadań 150 minut*

**Zad 1 (6 pkt)**

Sporządź wykres funkcji

$$y = \sqrt{x \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}}$$

**Zad 2 ( 6 pkt)**

Dla jakiej wartości parametru  $m$  równanie  $(m-1)x^2 + (m+1)x + (m-1) = 0$  ma dwa różne pierwiastki dodatnie?

**Zad 3 (6 pkt)**

W trójkącie prostokątnym długość wysokości i środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego oraz długość przeciwprostokątnej tworzą ciąg geometryczny, którego iloczyn wyrazów jest równy 8.

Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt.

**Zad 4 ( 6 pkt)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między płaszczyznami sąsiednich ścian bocznych wynosi  $120^\circ$ . Oblicz kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

**Zad 5 ( 6 pkt)**

W urnie znajduje się 8 kul białych i 4 czarne. Z urny wylosowano bez zwracania 5 kul.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że stosunek liczby kul czarnych do liczby kul białych w urnie zwiększył się.

**Życzymy powodzenia**

**Kryteria oceniania dla klasy III LO i IV Technikum – zakres podstawowy**

| Nr zad | Wykonana czynność                                                                                                                                                            | Pkt |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1      | Wyznaczenie dziedziny funkcji: $D=(0, \infty)$                                                                                                                               | 0,5 |
|        | Przekształcenie wyrażeń do postaci : $\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 = \frac{ 1+x }{\sqrt{2x}}$ i $\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1 = \frac{ 1-x }{\sqrt{2x}}$                       | 2,5 |
|        | Zapisanie przepisu funkcji w postaci: $y = \sqrt{x \frac{ 1+x - 1-x }{ 1+x + 1-x }} = \begin{cases} x, & \text{gdy } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$     | 2   |
|        | Wykonanie wykresu funkcji                                                                                                                                                    | 1   |
| 2      | Zapisanie układu warunków dla których równanie posiada dwa różne pierwiastki: $\begin{cases} m \neq 1 \\ (m+1)^2 - 4(m-1)^2 > 0 \end{cases}$                                 | 0,5 |
|        | Rozwiązanie układu : $m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, 3)$                                                                                                         | 2   |
|        | Zapisanie układu warunków, dla których pierwiastki są dodatnie: $\begin{cases} \frac{m-1}{m-1} > 0 \\ \frac{-(m+1)}{m-1} > 0 \end{cases}$                                    | 1   |
|        | Rozwiązanie układu nierówności : $m \in (-1, 1)$                                                                                                                             | 2   |
|        | Wyznaczenie $m$ dla którego równanie posiada dwa różne pierwiastki: $m \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$                                                                      | 0,5 |
| 3      | Analiza zadania, rysunek. Niech $h$ - długość wysokości, $d$ – długość środkowej, $a, b$ - długości przyprostokątnych, $c$ - długość przeciwprostokątnej                     | 0,5 |
|        | Zapisanie równania $h \cdot hq \cdot hq^2 = 8$ gdzie $q$ jest ilorazem ciągu i obliczenie długości środkowej : $d=2$                                                         | 0,5 |
|        | Zauważenie, że długość środkowej jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie, a tym samym stanowi połowę długości przeciwprostokątnej                             | 1   |
|        | Obliczenie długości przeciwprostokątnej, długości wysokości oraz obliczenie $q$ : $c=4, h=1, q=2$                                                                            | 0,5 |
|        | Zapisanie układu równań $\begin{cases} a \cdot b = 4 \\ a^2 + b^2 = 16 \end{cases}$                                                                                          | 1   |
|        | Rozwiązanie układu równań : $a = \sqrt{8-4\sqrt{3}}, b = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$                                                                                                 | 1   |
|        | Znajomość wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w okrąg:<br>$r = \frac{c \cdot h}{a+b+c}$                                                                              | 0,5 |
|        | Obliczenie długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt :<br>$r = \frac{4}{2\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 4} = \frac{2}{2+\sqrt{6}}$                             | 1   |
| 4      | Analiza zadania, rysunek, niech np.<br>$ AB  = a,  AW  =  CW  =  BW  =  DW  = b,  BE  =  DE  = h_1$ gdzie E jest punktem wspólnym wysokości ścian bocznych poprowadzonych od | 0,5 |

|   |                                                                                                                                            |     |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|   | wierzchołków B i D i $ WF  = h$ (wysokość ściany bocznej), $ \angle BED  = 120^\circ$                                                      |     |
|   | Zapisanie $h$ przy pomocy $a$ i $b$ : $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$                                                                     | 0,5 |
|   | Zapisanie $h_1$ przy pomocy $a$ : $h_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$                                                                              | 0,5 |
|   | Zauważenie, że trójkąty BCE i WFC są podobne i zapisanie proporcji:<br>$\frac{h_1}{a} = \frac{h}{b}$                                       | 1   |
|   | Zapisanie równania: $\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}{b}$                                                            | 0,5 |
|   | Rozwiązanie równania ze względu na $b$ : $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$                                                                         | 1   |
|   | Zapisanie $h$ za pomocą $a$ : $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$                                                                                    | 1   |
|   | Obliczenie $\cos\beta$ , gdzie $\beta$ jest miarą kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy: $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0,5 |
|   | Podanie miary kąta: $45^\circ$                                                                                                             | 0,5 |
| 5 | Określenie przestrzeni zdarzeń elementarnych                                                                                               | 0,5 |
|   | Obliczenie stosunku liczby kul czarnych do liczby kul białych: $\frac{1}{2}$                                                               | 0,5 |
|   | Zauważenie, że stosunek będzie większy gdy wylosujemy pięć kul białych lub cztery kule białe i jedną czarną                                | 2   |
|   | Zapisanie prawdopodobieństwa: $\frac{\binom{8}{5} + \binom{8}{4}\binom{4}{1}}{\binom{12}{5}}$                                              | 2   |
|   | Obliczenie prawdopodobieństwa: $\frac{14}{33}$                                                                                             | 1   |

Za poprawne rozwiązanie zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania, należy przyznać maksymalną liczbę punktów. Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie metodą inną i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważnie do wymienionych w schemacie. Można przyznawać połówki punktów.