

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa III LO i IV Technikum – zakres podstawowy
Etap wojewódzki – 10.03.2007 rok
Czas rozwiązywania zadań – 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji : $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \frac{2x+4}{x+3}$.

Korzystając z wykresów funkcji f i g , podaj liczbę dodatnich i ujemnych rozwiązań równania

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2 (6 pkt)

Dodatnie liczby $a, b, 1$ tworzą ciąg arytmetyczny. Liczby $a, b, a+b+1$ tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 3 (6 pkt)

Z pudełka w którym jest jednakowa liczba kul białych i czarnych losujemy trzy razy po jednej kuli, przy czym po każdym losowaniu wkładamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka i dokładamy jeszcze jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana. Oblicz ile może być kul w pudełku, jeśli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul tego samego koloru jest mniejsze od $\frac{7}{22}$

Zadanie 4 (6 pkt)

W trapez równoramienny o podstawach długości a i b można wpisać okrąg. Udowodnij, że promień tego okręgu ma długość równą $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$

Zadanie 5 (6 pkt)

Trójkąt równoramienny o obwodzie 16 centymetrów obracamy wokół podstawy. Jakie powinny być długości boków tego trójkąta, aby objętość powstałej bryły była największa?

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy III LO, IV Technikum – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Sporządzenie wykresu funkcji $f(x) = \cos x$	1
	Sporządzenie wykresu funkcji $g(x) = \frac{2x+4}{x+3}$	2
	Przekształcenie równania do postaci : $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}$	1
	Sporządzenie wykresu funkcji $y = f(x) + \frac{1}{2}$	1
	Odczytanie liczby rozwiązań dodatnich i ujemnych równania: dwa ujemne i jedno dodatnie rozwiązanie	1
2	Zapisanie wyrazów ciągu arytmetycznego w postaci: $a = 1 - 2r, b = 1 - r, c = 1$	1
	Zapisanie wyrazów ciągu geometrycznego w postaci: $1-2r, 1-r, 3-3r$	1
	Zapisanie równania korzystając z własności ciągu geometrycznego: $(1-r)^2 = (1-2r)(3-3r)$	1
	Rozwiązanie równania: $r = 1$ lub $r = \frac{2}{5}$	1,5
	Obliczenie wyrazów ciągu geometrycznego : $-1, 0, 0$ lub $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}$ oraz dokonanie wyboru ciągu spełniającego warunki zadania : $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}$	1,5
3	Analiza zadania : n - liczba kul białych , n - liczba kul czarnych, $2n$ - liczba wszystkich kul, A zdarzenie polegające na wylosowaniu trzech kul w tym samym kolorze	1
	Zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{n+2}{2n+2} = \frac{n+2}{2(2n+1)}$	2,5
	Zapisanie nierówności i założenia : $\frac{n+2}{2(2n+1)} < \frac{7}{22} \quad n \in N$	1
	Rozwiązanie równania : $n > 5$ i udzielenie odpowiedzi: w pudełku powinno być co najmniej po 6 kul każdego koloru aby prawdopodobieństwo było mniejsze od $\frac{7}{22}$	1,5
4	Analiza zadania, rysunek wraz z oznaczeniami np. długości podstaw $ AB = a, CD = b$, długość ramion $ BC $ i $ AD $ jest równa m ,	1
	Zapisanie na podstawie twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt równania: $2m = a + b$ oraz zapisanie długości odcinka AE w postaci: $ AE = \frac{a-b}{2}$	2
	Zapisanie na podstawie twierdzenia Pitagorasa równania: $ AD ^2 = AE ^2 + DE ^2$, gdzie E jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D	1
	Zapisanie równania w postaci $(2r)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	0,5
	Przekształcenie równania do postaci $r = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$	1,5
5	Analiza zadania, rysunek wraz z oznaczeniami np. długość podstawy AB równa się a , a długość ramion BC i AC jest równa b	1

Stwierdzenie, że powstała bryła jest sumą dwóch stożków przystających o wspólnej podstawie.	0,5
Zapisanie objętości bryły : $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot r_s^2 \frac{a}{2}$, gdzie r_s jest wysokością w trójkącie poprowadzoną z wierzchołka C	0,5
Zapisanie r_s za pomocą a, b : $r_s = \sqrt{b - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$	0,5
Zapisanie r_s za pomocą b wykorzystując fakt, że obwód trójkąta jest równy 16 centymetrów: $r_s = \sqrt{16(b-4)}$	1
Zapisanie objętości bryły w postaci : $V(b) = \frac{32\pi}{3}(b-4)(8-b)$ i wyznaczenie jej dziedziny $D_V = (4,8)$	1
Wykazanie, że funkcja przyjmuje wartość największą i obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli: $b = 6, 6 \in D_V$	1
Obliczenie a : $a = 4$ i udzielenie odpowiedzi : $a = 4$ centymetry, $b = 6$ centymetrów	0,5

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.