

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa III LO - zakres podstawowy
Etap wojewódzki - 21.03.2009 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1 (6 pkt)

Pary liczb całkowitych (x,y) spełniających równanie:

$$x^3 - x^2y + xy - y^2 = 5$$

są wierzchołkami pewnego wielokąta wypukłego .

Oblicz jego obwód.

Zadanie 2 (6 pkt)

Prosta l równoległa do boku AB trójkąta ABC dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. Oblicz, w jakim stosunku prosta l dzieli bok AC ?

Zadanie 3 (6 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy długości a pole powierzchni podstawy, powierzchni bocznej i powierzchni całkowitej (w podanej kolejności) są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Wyznacz tangens kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do jego podstawy.

Zadanie 4 (6 pkt)

W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy 0,5.

Wyznacz wartość tangensa jednego z kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 5 (6 pkt)

Ze zbioru $Z = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ losujemy kolejno bez zwracania współczynniki a, b, c funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

- a) A - otrzymana funkcja jest malejąca w zbiorze $\mathbb{R}$,
- b) B - otrzymana funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, -1)$ i rosnąca w przedziale $(-1, +\infty)$,
- c) C - prosta o równaniu $x=0$ jest osią symetrii wykresu otrzymanej funkcji.

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy III LO – zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	Pkt
1	Zapisanie lewej strony równania w postaci iloczynu: $(x - y)(x^2 + y) = 5$	1
	Zapisanie alternatywy czterech możliwych przypadków: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y = 5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + y = -5 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x - y = -5 \\ x^2 + y = -1 \end{cases}$	1
	Obliczenie współrzędnych wierzchołków: (2, 1), (2, -3), (-3, -4), (-3, -8)	2
	Obliczenie długości boków: 4, 4, $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$	1,5
	Obliczenie obwodu: $2(4 + 5\sqrt{2})$	0,5
2	Rysunek z oznaczeniami	0,5
	Zauważenie, że trójkąty ABC i A'B'C gdzie A' i B' są punktami przecięcia się prostej l odpowiednio z bokiem AC i BC są podobne	0,5
	Zapisanie, że stosunek pól trójkątów ABC i A'B'C jest równy kwadratowi skali podobieństwa czyli 2	1
	Obliczenie skali podobieństwa tych trójkątów: $k = \sqrt{2}$	0,5
	Zapisanie równania: $\frac{ A'C + A'A }{ A'C } = \sqrt{2}$	1
	Przekształcenie równania do postaci: $1 + \frac{ A'A }{ A'C } = \sqrt{2}$	2
	Obliczenie, w jakim stosunku prosta dzieli bok AC: $\sqrt{2} - 1$	0,5
3	Rysunek i analiza zadania: a- długość krawędzi podstawy, h- długość wysokości graniastosłupa, $a > 0$, $h > 0$	0,5
	Zapisanie wzoru na $\tan \alpha$: $\tan \alpha = \frac{h}{d} = \frac{h}{a\sqrt{2}}$	1
	Zapisanie kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego: $a^2, 4ah, 2a^2 + 4ah$	0,5
	Zapisanie równania z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego: $\frac{4ah}{a^2} = \frac{2a^2 + 4ah}{4ah}$	0,5
	Zapisanie równania w postaci: $4 \cdot \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{h} - 1 = 0$	1
	Wprowadzenie pomocniczej zmiennej $\frac{h}{a} = m$, $m > 0$ i zapisanie równania w postaci $4m - \frac{1}{2m} - 1 = 0$	1
	Przekształcenie równania do postaci: $8m^2 - 2m - 1 = 0$ i rozwiązanie równania: $m_1 = \frac{1}{2}$, $m_2 = -\frac{1}{4}$ i wybór z uzasadnieniem odpowiedzi: $\frac{h}{a} = \frac{1}{2}$	1
	Obliczenie $\tan \alpha$: $\tan \alpha = \frac{h}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$	0,5

4	Rysunek z oznaczeniami i założenie, że $b > a$	1
	Zapisanie równania z niewiadomą a, b : $3a^2 - 8ba + 3b^2 = 0$	2
	Rozwiązanie równania kwadratowego ze względu na a : $a_1 = \frac{b(4 + \sqrt{7})}{3}, a_2 = \frac{b(4 - \sqrt{7})}{3}$	2
	Obliczenie tangensa kąta ostrego trójkąta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$ lub $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$ Za obliczenie jednej z wartości należy przyznać maksimum punktów	1
	Druga wersja kryteriów do zadania 4	
4	Rysunek z oznaczeniami i założenie, że $b > a$	1
	Zapisanie równania $\frac{b-a}{c} = \frac{1}{2}$ w postaci $\frac{b}{c} - \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ czyli np, $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2}$	1
	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$ $\sin \alpha = \frac{-1 - \sqrt{7}}{4}$ lub $\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}$	2
	Wybór właściwej wartości $\sin \alpha$, uwzględniając, że α jest kątem ostrym trójkąta: $\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}$	0,5
	Obliczenie $\cos \alpha$: $\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$	1
	Obliczenie $\operatorname{tg} \alpha$: $\frac{4 - \sqrt{7}}{3}$	0,5
5	Obliczenie mocy przestrzeni zdarzeń elementarnych: $ \Omega = 60$	1
	Zauważenie, że funkcja jest malejąca w zbiorze R gdy $a = 0, b = -1, c \in \{1, 2, 3\}$ i obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = 0,05$	1
	Zauważenie, że dla przypadku b współczynnik $a > 0$ i $\frac{-b}{2a} = -1$	1
	Wyznaczenie liczb ze zbioru Z spełniające powyższe warunki: $a = 1, b = 2$ i zauważenie, że c należy do zbioru $\{-1, 0, 3\}$	0,5
	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B : $P(B) = 0,05$	0,5
	Zauważenie, że $b = 0, a, c \in \{-1, 1, 2, 3\}$ i $a \neq c$	1
	Obliczenie prawdopodobieństwa zbioru C : $P(C) = 0,2$	1

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie.

Można przyznawać połówki punktów.