

Międzyszkolne Zawody Matematyczne
Klasa III LO, IV Technikum – zakres podstawowy
Etap rejonowy – 19.12.2009 rok
Czas rozwiązywania zadań 150 minut

Zadanie 1. (2 pkt)

Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 80 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

Zadanie 2. (2 pkt)

Przedstaw liczbę $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$ jako różnicę dwóch pierwiastków z liczb naturalnych.

Zadanie 3. (3 pkt)

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100, które są podzielne przez 6 lub przez 8

Zadanie 4. (3 pkt)

Adam powiedział do Bartka: „Gdy byłem w twoim wieku, byłem 3 razy starszy od ciebie, a gdy ty będziesz w moim wieku, będziemy mieć razem 60 lat”. Ile lat ma Bartek?

Zadanie 5. (4 pkt)

W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α, β jest spełniony warunek $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Oblicz $\cos \alpha \cdot \cos \beta$

Zadanie 6. (4 pkt)

Oblicz długość przekątnej trapezu równoramiennego, w który można wpisać okrąg jeśli długości podstaw trapezu są równe $a = 2, b = 8$

Zadanie 7. (4 pkt)

Okrąg O jest styczny do boku AB kwadratu ABCD, a bok CD jest cięciwą okręgu O. Oblicz promień okręgu O, jeśli bok kwadratu ABCD ma długość 8 cm

Zadanie 8. (4 pkt)

Znajdź długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku $a = 2\sqrt{3} + 3$

Zadanie 9. (5 pkt)

Wysokość trójkąta równobocznego T jest średnicą koła K. Oblicz pole tej części trójkąta T, która nie zawiera się w kole K

Zadanie 10. (5 pkt)

Udowodnij, że jeśli k, m są dodatnimi liczbami całkowitymi i $k > m$ to $\frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[m]{m}} < \frac{k}{m}$

..

Życzymy powodzenia

Kryteria oceniania dla klasy III LO, IV Technikum– zakres podstawowy

Nr zad	Wykonana czynność	pkt
1	Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia do zapisania pierwszego równania w postaci $(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = 80$ i obliczenie $x^2 + y^2 = 10$	1
	Rozwiązanie układu równań $(\pm 3, \pm 1)$ (4 rozwiązania)	1
2	Zapisanie równania $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$ i doprowadzenie go do postaci układu $\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 30 \end{cases}$	1
	Rozwiązanie układu i wybranie prawidłowego rozwiązania $x=6, y=5$	1
3	Obliczenie sumy wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100 i podzielnych przez 6 (816), oraz wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 100 i podzielnych przez 8 (624)	1
	Obliczenie sumy wszystkich liczb podzielnych przez 24 (240)	1
	Rozwiązanie zadania $816 + 624 - 240 = 1200$	1
4	Analiza warunków zadania: x-wiek Adama, y-wiek Bartka, warunki dla x-y lat temu oraz za x-y lat	1
	Zapisanie warunków $3(2y-x) = y$ oraz $x + 2x-y = 60$	1
	Rozwiązanie układu równań i podanie odpowiedzi	1
5	Podniesienie obu stron równania do kwadratu i wykorzystanie jedynki trygonometrycznej	2
	Zauważenie, że w trójkącie prostokątnym $\sin \alpha = \cos \beta, \sin \beta = \cos \alpha$	1
	Podanie odpowiedzi $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{8}$	1
6	Wykonanie rysunku z oznaczeniami	1
	Wykorzystanie faktu, że sumy boków leżących naprzeciw siebie są równe do obliczenia długości ramienia $c = 5$	1
	Obliczenie wysokości trapezu $h = 4$	1
	Obliczenie długości przekątnej $d = \sqrt{41}$	1
7	Wykonanie rysunku z oznaczeniami	1
	Znalezienie trójkąta prostokątnego o bokach 4, 8 – r, r i ułożenie równania z tw. Pitagorasa	2
	Obliczenie długości promienia $r = 5$	1
8	Wykonanie rysunku z oznaczeniami	1
	Zauważenie, że wierzchołek kwadratu dzieli ramię trójkąta na odcinki o długościach x (bok kwadratu) oraz a – x (a – bok trójkąta)	1
	Zauważenie, że podstawa trójkąta została podzielona na odcinki o długościach $\frac{a-x}{2}, x, \frac{a-x}{2}$	1
	Wykorzystanie tw. Pitagorasa do obliczenia $x = 3$	1
9	Wykonanie rysunku z oznaczeniami	1
	Obliczenie kątów trójkąta rozwartokątnego i wycinka koła powstałych przez narysowanie wysokości trójkąta oraz promienia koła do punktu wspólnego ramienia trójkąta i okręgu	1
	Obliczenie pól trójkąta rozwartokątnego i wycinka koła z poprzedniej czynności	1,5
	Obliczenie szukanego pola przez odjęcie od pola trójkąta równobocznego	1,5

	dwukrotności pól trójkąta rozwartokątnego i wycinka koła	
10	Podniesienie obu stron nierówności do potęgi k	1
	Doprowadzenie nierówności do postaci $m^{k-1} < k^{k-1} \cdot m^{\frac{k-m}{m}}$	2
	Zauważenie, że $m^{k-1} < k^{k-1}$ oraz $k^{k-1} < k^{k-1} \cdot m^{\frac{k-m}{m}}$	2

Za poprawnie rozwiązane zadania metodą inną aniżeli opisana w schemacie punktowania należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą i popełnił błędy, to należy określić i ocenić czynności równoważne do wymienionych w schemacie. Można przyznawać połówki punktów.