

*Międzyszkolne Zawody Matematyczne  
Klasa III LO, IV Technikum – zakres podstawowy*

*Etap wojewódzki – 19.03.2011 rok*

*Czas rozwiązywania zadań 150 minut*

Zad.1 ( 6 pkt).

Uzasadnij, że jeżeli  $a_n$  jest ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich, to

$$a_1 + a_4 \geq a_2 + a_3$$

Zad.2 ( 6 pkt).

Wiedząc, że  $a + \frac{1}{a} = \sqrt{5}$  oblicz  $a^5 + \frac{1}{a^5}$

Zad.3 ( 6 pkt).

Trapez o polu P i kątach przy podstawie  $30^\circ$  i  $60^\circ$  opisano na okręgu. Znajdź promień tego okręgu.

Zad.4 ( 6 pkt).

Dla jakiej wartości parametru k liczba 1 leży pomiędzy rozwiązaniami równania

$$kx^2 - 4x = 3x^2 - k + 2 ?$$

Zad.5 ( 6 pkt).

Podstawą ostrosłupa jest równoramienny trójkąt prostokątny. Wszystkie krawędzie boczne mają długość  $a$  cm i są nachylone do podstawy pod kątem  $60^\circ$ . Oblicz objętość ostrosłupa.

### Kryteria oceniania dla klasy III LO, IV Technikum– zakres podstawowy

| Nr zadania | czynność                                                                                                                                                                                                                   | punkty |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1          | Zapisanie wyrazów ciągu w postaci $a_2 = a_1q$ itd                                                                                                                                                                         | 1      |
|            | Zapisanie nierówności $a_1 + a_1q^3 \geq a_1q + a_1q^2$ i rozłożenie stron na czynniki $a_1(1+q)(1-q+q^2) \geq a_1q(1+q)$                                                                                                  | 2      |
|            | Podzielenie obu stron przez $a_1(1+q)$ z uzasadnieniem!                                                                                                                                                                    | 1      |
|            | Uzasadnienie prawdziwości nierówności $1-2q+q^2 \geq 0$                                                                                                                                                                    | 2      |
| 2          | Podniesienie obu stron równania do kwadratu i wyliczenie $a^2 + \frac{1}{a^2} = 3$                                                                                                                                         | 2      |
|            | Obliczenie $a^3 + \frac{1}{a^3} = 2\sqrt{5}$                                                                                                                                                                               | 2      |
|            | Obliczenie $a^5 + \frac{1}{a^5} = 5\sqrt{5}$                                                                                                                                                                               | 2      |
| 3          | Wykonanie rysunku z oznaczeniami np. a-długość dłuższej podstawy, b-długość krótszej podstawy, c-długość ramienia przy kącie $30^\circ$ , d –długość ramienia przy kącie $60^\circ$ , r-długość promienia okręgu wpisanego | 1      |
|            | Wykorzystanie wzoru na pole trapezu $P = \frac{1}{2}(a+b) \cdot 2r$ i wyliczenie $r = \frac{P}{a+b}$                                                                                                                       | 2      |
|            | Trapez jest opisany na okręgu więc $a+b=c+d$                                                                                                                                                                               | 1      |
|            | Wyliczenie z funkcji trygonometrycznych $c=4r$ , $d = \frac{4\sqrt{3}r}{3}$                                                                                                                                                | 1      |
|            | Obliczenie $r = \sqrt{\frac{\sqrt{3}P}{4+4\sqrt{3}}}$                                                                                                                                                                      | 1      |
|            |                                                                                                                                                                                                                            |        |
| 4          | Zapisanie równania w postaci $(k-3)x^2 - 4x + k - 2 = 0$ i odrzucenie $k=3$                                                                                                                                                | 1      |
|            | Rozpatrywanie 2 przypadków:<br>I. $k-3>0$ , $\Delta>0$ , $f(1)<0$ ,<br>II. $k-3<0$ , $\Delta>0$ , $f(1)>0$ ,<br>gdzie $f(x) = (k-3)x^2 - 4x + k - 2$                                                                       | 2      |
|            | Znalezienie rozwiązań w obu przypadkach                                                                                                                                                                                    | 2      |
|            | Podanie odpowiedzi $k>3$                                                                                                                                                                                                   | 1      |
| 5          | Wykonanie rysunku ostrosłupa ABCS o wierzchołku S i spodku wysokości D ze wszystkimi oznaczeniami                                                                                                                          | 1      |
|            | Zauważenie, że trójkąty ADS, BDS i CDS są przystające                                                                                                                                                                      | 1      |
|            | Zauważenie, że D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zatem środkiem przeciwprostokątnej                                                                                                                       | 2      |
|            | Obliczenie długości przyprostokątnej podstawy $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ i wysokości ostrosłupa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz objętości $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}$                                                       | 2      |

