

ZADANIA PRZYGOTOWUJĄCE DO SPRAWDZIANÓW W KLASIE TRZECIEJ.

I. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

- 1) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 24576?
- 2) Pięciu przyjaciół wybrało się do kina. Na ile sposobów mogą usiąść na 5 miejscach w rzędzie?
- 3) Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których cyfry :
a) nie powtarzają się? b) cyfry mogą się powtórzyć?
- 4) Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:
a) na innym piętrze b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?
- 5) Na ile sposobów 20 osób może wysiąść z pociągu, który zatrzymuje się na 6 stacjach?
- 6) W turnieju szachowym rozegrano 55 partii. Ilu było uczestników, jeśli każdy uczestnik rozegrał jedną partię z każdym z pozostałych?
- 7) W partii 40 monitorów 4 są uszkodzone. Wybieramy 3 monitory. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, żeby tylko jeden z wybranych był uszkodzony?
- 8) Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n > 4$) z których dowolne 3 nie są współliniowe. Ile punktów zaznaczono, jeśli wyznaczyły one 21 różnych prostych?
- 9) W klasie jest 8 chłopców i 9 dziewcząt. Ile jest sposobów wybrania pięcioosobowej delegacji z tej grupy, tak by znalazły się tam:
a) 3 dziewczynki i jeden chłopiec? b) co najmniej jeden chłopiec?
- 10) Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$ losujemy jednocześnie dwie. Ile jest możliwych wyników losowania, tak by: a) suma obu liczb była parzysta? b) iloczyn obu liczb był podzielny przez 8?
- 11) Ze zbioru liczb $\{1001, 101002, 10003, \dots, 2008\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
a) jest ona podzielna przez 5, b) jest ona liczbą parzystą, c) jest ona parzystą lub podzielna przez 5.
- 12) Rzucamy kolejno sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że
a) suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą
b) iloczyn oczek otrzymanych w obu rzutach jest podzielny przez 4.
- 13) Rzucamy raz dwunastościenną kostką z oczkami 1, 2, ..., 12. Rozważ zdarzenia: $A = \{\omega \in \Omega : \omega \leq 8\}$, $B = \{\omega \in \Omega : 3 \leq \omega \leq 6\}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń: $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B - A)$.
- 14) Z talii 52 kart, losujemy jednocześnie 3 karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, wylosowania dwóch asów i króla?
- 15) Na loterii jest 40 losów w tym 4 wygrywające. Kupujemy dwa losy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
a) wśród zakupionych losów jest dokładnie jeden wygrywający?
b) wśród zakupionych losów jest co najmniej jeden los wygrywający.
- 16) Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać jeśli $P(A) = 0,5$ $P(B) = 0,6$?
- 17) Oblicz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B jeśli $P(A) = 0,5$, $P(B) = \frac{2}{3}$ i $P(A \cap B) = 0,25$.
- 18) Niech $A, B \subset \Omega$ oraz $P(A \cap B) = 0,25$, $P(A) = 0,625$. Oblicz $P(A - B)$.
- 19) Niech $A, B \subset \Omega$ $P(A) = 0,6$ $P(B) = 0,5$. Uzasadnij, że $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,5$?
- 20) W wycieczce bierze udział 50 osób: 20% jej uczestników stanowią Belgowie, 40% - Holendrzy a pozostali są Polakami. Telewizja postanowiła przeprowadzić wywiad z dwoma losowo wybranymi osobami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jedna z wybranych osób będzie Polakiem?
- 21) Ustawiono w dowolnej kolejności 7 osób, jedna za drugą, a wśród nich Anię i Kasię. Oblicz prawdopodobieństwo, że pomiędzy Anią i Kasią stoją dokładnie 3 inne osoby.
- 22) Wymień trzy znane ci własności prawdopodobieństwa.
Rzucamy dwa razy czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do: iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą podzielną przez trzy.
- 23) W urnie jest n kul, w tym 3 białe, a pozostałe czarne. Losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule są białe jest równe $\frac{1}{15}$. Ile kul czarnych jest w urnie?
- 24) Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest parzysta, jeśli wiadomo, że w pierwszym rzucie wypadły trzy oczka.
- 25) Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie co najmniej raz szóstka pod warunkiem, że w drugim rzucie wypadła szóstka.

- 26) Z talii 52 kart wyciągamy losowo jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona figurą, jeśli wiadomo, że jest koloru kier?
- 27) Niech $A, B \subset \Omega$
- Oblicz $P(B)$, jeśli $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{6}$ i $P(B|A) = \frac{1}{4}$
 - Oblicz $P(A|B)$ jeśli: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = 0,4$ $P(B|A) = 0,5$
- 28) Sprawdź czy prawdą jest że jeśli $P(A|B) = P(B|A)$ i $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ to zdarzenia A i B są niezależne.
- 29) Wykaż, że jeśli $P(B) > 0$ to $P(A' | B) = 1 - P(A|B)$.
- 30) W hurtowni zabawek 50% pluszowych smoków pochodzi z fabryki SMYK, a pozostałe w równych częściach z fabryk UŚMIECH oraz WESOŁEK. Wadliwych jest 2% smoków z fabryki SMYK, 3% z UŚMIECH oraz 1% z WESOŁEK. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany smok nie ma wad?
- 31) Rzucamy kolejno sześcienną kostką do gry. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu za pierwszym razem szóstki, B - za drugim razem szóstki. Zbadaj czy zdarzenia A i B są niezależne.
- 32) Jeżeli $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ Oblicz $P(B' | A')$. Czy zdarzenia A' i B' są niezależne?
- 33) Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzy wybrane losowo wierzchołki sześcianu są wierzchołkami trójkąta równobocznego?
- 34) Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 4 lub 6 oczek zyskujemy 2 punkty. W przeciwnym przypadku tracimy 1 punkt. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po pięciu rzutach będziemy mieli dokładnie 1 punkt?
- 35) Na półce ułożono obok siebie 26 książek, w tym „Iliadę” i „Odyseję”. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiędzy tymi dwiema książkami będzie dokładnie 5 książek?
- 36) Koszykarz trafia do kosza z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ w każdym rzucie. Oblicz prawdopodobieństwo, że w trzech próbach trafi do kosza dokładnie 2 razy oraz prawdopodobieństwo, że trafi co najwyżej dwa razy.
- 37) Dane zbiory $A = \{1, 2, 3, \dots, 62\}$ $B = \{1, 2, 3, \dots, 124\}$. Losujemy zbiór a następnie z tego zbioru liczbę x . Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba $x^2 + 1$ jest podzielna przez 10.
- 38) Wśród n losów na loterii jest 6 losów wygrywających. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo tego, że zakupione dwa losy będą wygrywające jest większe od $\frac{1}{5}$?
- 39) Wiadomo, że $A, B \subset \Omega$ i A, B są zdarzeniami niezależnymi oraz $P(A) = 0,25$ i $P(A \cap B) = 0,2$. Oblicz prawdopodobieństwo: $P(A \cup B)$, $P(B - A)$, $P(A - B)$.
- 40) Wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$ oraz $P(B) = \frac{1}{6}$. Czy zdarzenia A i B wykluczają się?

II. Stereometria

- Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli przekątna jego ściany tworzy:
 - z krawędzią podstawy kąt 30°
 - z przekątną graniastosłupa kąt 30°
- Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 26 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α . Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa, wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.
- Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez o bokach długości 4 cm, 4 cm, 4 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 7 cm.
- Długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka prostopadłościanu tworzą ciąg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest równy 2 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu, jeśli jego objętość jest równa 216 cm^3 .
- Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i wysokość jego ściany bocznej tworzą kąt α , taki że $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 12 cm.
- Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną tego ostrosłupa kąt α , taki że $\cos \alpha = 0,8$. Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa
- Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długości 2 cm, a kąt między nimi jest równy 30° . Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

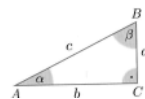
- 8) Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z wysokością ściany bocznej kąt 30° .
Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli krawędź podstawy ma długość a .
- 9) Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Oblicz kosinus kąta, jaki tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.
- 10) Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 3 cm przecięto płaszczyzną zawierającą przeciwległe krawędzie jego podstaw. Otrzymany przekrój tworzy z jedną ze ścian bocznych kąt α , taki że $\cos \alpha = 0,8$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.
- 11) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $72\sqrt{3}\text{ cm}^3$, a jego wysokość wynosi 2 cm .
Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.
- 12) Czworoscian foremny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Oblicz kosinus kąta zawartego między tą płaszczyzną a jego podstawą.
- 13) Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 40 cm i tworzy z podstawą walca kąt α . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego walca, jeśli $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 14) Ile metrów sześciennych gazu mieści się w rurze o długości 1 km i średnicy wewnętrznej 50 cm ?
- 15) Kąt rozwarcia stożka ma 60° , a pole jego powierzchni bocznej jest równe $8\pi\text{ cm}^2$. Oblicz objętość tego stożka.
- 16) Objętość stożka o wysokości 2 cm jest równa $8\pi\text{ cm}^3$. Wyznacz kąt między tworzącą stożka a jego podstawą.
- 17) Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $96\pi\text{ cm}^2$, a średnica jego podstawy ma długość 12 cm .
Oblicz objętość tego stożka.
- 18) Wycinek koła o promieniu 2 i kącie środkowym 90° zwinięto w powierzchnię boczną stożka.
Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.
- 19) Pole powierzchni bocznej stożka stanowi $\frac{2}{3}$ jego powierzchni całkowitej. Wyznacz miarę kąta, jaki tworzy wysokość stożka z jego tworzącą.
- 20) Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem o przekątnej długości 2 . Przekątna tego prostokąta tworzy z jego bokiem, będącym wysokością walca kąt 60° . Oblicz objętość walca.
- 21) Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa nie należący do podstawy jest trójkątem równobocznym o polu $12\sqrt{3}$.
Oblicz objętość tego ostrosłupa.
- 22) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa 6 i tworzy z krawędzią boczną kąt 45° .
Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem 60° . Oblicz pole otrzymanego przekroju.
- 23) Dany jest romb o boku długości a i kącie ostrym α . Oblicz objętość bryły otrzymanej przez obrót tego rombu wokół dłuższej przekątnej.
- 24) Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 8 cm i 2 cm oraz wysokości równej 3 cm . Oblicz objętość graniastosłupa, wiedząc, że jego przekątna ma długość $5\sqrt{2}\text{ cm}$.
- 25) Objętość walca jest równa $\frac{16}{\pi}$, a jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem.
Oblicz wysokość walca.
- 26) Oblicz objętość stożka, w którym pole podstawy jest równe 16 , a pole powierzchni bocznej wynosi 20 .
- 27) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym pole ściany bocznej jest cztery razy większe od pola podstawy.
Oblicz kosinus kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.
- 28) Stosunek pola powierzchni bocznej stożka do jego podstawy jest równy $\sqrt{2} : 1$. Objętość stożka jest równa objętości kuli o średnicy 6 . Oblicz wysokość tego stożka.
- 29) Trójkąt o polu S obrócono wokół najdłuższego boku. Wysokość opuszczona na ten bok ma długość h .
Znajdź objętość otrzymanej w wyniku obrotu bryły.
- 30) Objętość kuli o promieniu $R=3\text{ cm}$ jest równa objętości walca, którego przekrój osiowy jest kwadratem.
Oblicz wysokość tego walca.

III. Trygonometria.

- 1) Podaj definicję funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym
Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego znając długości jego przyprostokątnych:

a) 5, 12 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ c) 2, $\sqrt{5}$

- 2) Wyznacz długości boków trójkąta prostokątnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α mając dane: a) $a=6$, $\operatorname{tg} \alpha=2$, b) $a=2$, $\sin \alpha=0,8$
c) $b=\sqrt{2}$ $\operatorname{tg} \alpha=3$.



- 3) Podaj definicję funkcji trygonometrycznych kąta dowolnego oraz znane ci związki między nimi .
Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta AOB, gdzie $A=(4,0)$, $O=(0,0)$ oraz:
a) $B=(3,4)$, b) $B=(-4,3)$, c) $B=(-3,-4)$, d) $B=(4,-4)$

- 4) Oblicz:

a) $\sin 765^\circ$, b) $\operatorname{ctg} 810^\circ$, c) $\sin(-1710^\circ)$, d) $\cos 1200^\circ$, e) $\cos(-1395^\circ)$, f) $\operatorname{ctg}(-450^\circ)$, g) $\operatorname{tg}(-750^\circ)$
h) $\operatorname{cgt} 120^\circ + \operatorname{tg}(-210^\circ)$ i) $\sin^2 310^\circ + \cos^2 310^\circ$ j) $\frac{2 \cos 120^\circ}{\operatorname{ctg} 120^\circ}$.

- 5) Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta x jeśli:

a) $\sin x = \frac{1}{3}$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ c) $\operatorname{tg} x = -3$ i $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

- 6) Naszkicuj wykresy funkcji i omów ich własności:

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ b) $g(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$ c) $h(x) = \cos -1$ d) $w(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) + 1$ e) $y = \sin x + |\sin x|$

- 7) Uprość wyrażenia a) $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) - 2\sin(450^\circ - \alpha)$ b) $\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2} + x) - \cos^2(x - \frac{\pi}{2})}{3\operatorname{tg}^2(x - \frac{3\pi}{2})}$

- 8) Sprawdź czy są j tożsamościami a) $\sin x \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 1$ b) $\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{2}{\sin^2 x}$

c) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x$. d) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = 4$ e) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 1$

f) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ g) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$

- 9) Rozwiąż równania:

a) $\sin x = -0.5$ b) $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ d) $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos x$ e) $\sin^2(2x - \frac{\pi}{4}) = 1$

f) $\sqrt{3} \operatorname{tg}(2x + \frac{2\pi}{3}) = 1$ g) $|4\cos x + 1| = 3$ h) $4\cos x \sin^2 x - 3\cos x = 0$ i) $\sin^2 x = 1 - \cos x$ j) $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$

k) $2\cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$ l) $2\sin^2 x = 1 - \sin x$ m) $2\sin^2 x - 2\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$ n) $2\cos^2 x = \sin x - 1$

- 10) Rozwiąż równania:

a) $2\cos^2 x = \sin 2x$ b) $\cos 2x + 2 = 2\sqrt{2} \cos x$ c) $\sin 5x + \sin 3x = 0$ d) $\cos 8x + \cos 2x = 0$ e) $\sin x - \sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1$

f) $\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x - 3$.

- 11) Rozwiąż nierówności:

a) $\sin x < \frac{1}{2}$ b) $\sqrt{2} \cos x \geq 1$ c) $\sin 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos \frac{x}{2} > \frac{1}{2}$ e) $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) \geq \sqrt{3}$ f) $3\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$ g) $\operatorname{ctg} 3x > \sqrt{3}$

h) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < -1$ i) $2\sin^2 x < 1$ j) $4\cos^2 x - 3 \leq 0$ k) $\operatorname{tg}^2 x \geq 1$ l) $|\sin x| < 1$ m) $|3\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}$ n) $|4\cos x - 1| > 1$

o) $|4\sin x + 1| < 3$ p) $|4\cos x - 1| > 1$

- 12) Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji: $y = \frac{2\cos^2 x + 6\cos x}{\sin x}$.

13) Określ dziedzinę funkcji: a) $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sqrt{1 - 2 \cos x}}$ b) $y = \frac{\sqrt{2 \sin x - 1}}{1 - 2 \cos \frac{x}{2}}$ c) $y = \frac{\cos x - 1}{\lg^2 x - 1}$

14) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ jest parzysta

15) Sprawdź parzystość funkcji: a) $y = x^2 \sin x$ b) $g(x) = \cos x + 1$

16) Wyznacz takie argumenty x , że:

A) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ i $x \in (2\pi; 3\pi)$ b) $\operatorname{tg} x = -1$ i $x \in (4\pi; 4\pi)$

17) Na podstawie wykresu funkcji f wyznacz jej największą i najmniejszą wartość w podany, przedziale. Odczytaj przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ $x \in \langle 0; \pi \rangle$ b) $f(x) = 1 + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ $x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \rangle$

18) Wyznacz długości przekątnych rombu o kącie ostrym 60° i boku długości 13. jaka jest długość promienia okręgu wpisanego w ten romb.

19) Naszkicuj wykres funkcji. Podaj przedziały w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie:

a) $f(x) = |\sin x| + \sin x$ b) $f(x) = |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x$

20) Korzystając z wykresu funkcji g opisz jej ekstrema jeśli $g(x) = \|\operatorname{tg} x| - 1\|$

IV. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

1) Oblicz wartość liczby a) $\frac{(9 \cdot 5^{12} - 5^{13}) \cdot 8^3}{2^9 \cdot 625^3}$, b) $3^{2+\log_3 5}$ d) $\log_2 1024$ c) $\frac{(1024 - 2^7) \cdot 343}{2^7 \cdot 7^5}$

d) $3^{2+\log_3 7}$ e) $\log_2 1024$ f) $\log_6 4 + \log_6 9$ g) $\log_{0,5} 0,6 - \log_{0,5} 0,15$ h) $\log_3 4 + \log_9 4$

2) Zapisz w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{4^{2\sqrt{3}} \cdot 8}{16^{\sqrt{3}+1}}$ b) $[2^2 : 4^{-3}]^{-3} : [(\sqrt{8})^2 : 4^{-3}]^2$ c) $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}}$

3) Wiedząc, że $\log_3 a = \frac{1}{3}$ oblicz $\log_3 \sqrt[4]{3a^6}$.

4) Podaj definicję, sporządź wykres oraz omów własności funkcji wykładniczej

5) Podaj definicję, sporządź wykres oraz omów własności funkcji logarytmicznej

6) Narysuj wykres, wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe i przedziały monotoniczności funkcji:

a) $f(x) = 2^{x-1} + 3$ b) $g(x) = \left| \left(\frac{1}{3} \right)^{x+1} - 9 \right|$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{3} \right)^{x+1} + 2$ d) $g(x) = |2^{x-2} - 4|$ e) $f(x) = 2 + \left(\frac{1}{2} \right)^{x+1}$

f) $g(x) = | \log_3 (x-3) - 1 |$ g) $g(x) = | 3^{x+1} - 3 |$ h) $f(x) = | \log_{0,5} (x-2) - 4 |$

5) Rozwiąż równania

a) $5^{x+1} = 125$ b) $2^{x^2} = 4^{2x-1}$ c) $3^{x+3} + 9^{x+2} = 810$ d) $6^{2x-1} = 216$ e) $2^{x^2} = (0,5)^{-5x+6}$ f) $8 \cdot 3^{x-2} + 9^{x-1} = 17$

g) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$

6) Rozwiąż równanie $\left(\frac{1}{9} \right)^x \cdot 27^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3^2}{\sqrt{3}} \right)^{-x}$ i podaj twierdzenia z których korzystałeś

7) Rozwiąż nierówności;

a) $\left(\frac{1}{3} \right)^{x+1} \geq \left(\frac{1}{27} \right)^{x-1}$ b) $7^{x+1} + 2 \cdot 7^{x-2} < 345$ c) $\left(\frac{1}{25} \right)^{x-2} < \left(\frac{1}{5} \right)^{4-2x}$ d) $3^{x+1} - 3^{x-2} \geq \frac{26}{9}$ e) $5^{x^2-7x+12} > 1$

f) $\left(\frac{2}{3} \right)^{x-2} \leq \frac{9}{4}$ g) $\left(\frac{1}{2} \right)^{x^2+7x+9} > 2$ h) $3^{4x-1} \leq \left(\frac{1}{9} \right)^{2-x}$ i) $3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0$ j)

$2^{2x+1} - 17 \cdot 2^x + 8 > 0$

8) Rozwiąż równania: a) $\log_2(3x+2)=1$ b) $\log_{0,5}(x^2-1)=4$ c) $\log_2(x)-\log_{16}x=3$

d) $\log 8 + 4\log 2 = \log 3 - \log 12 + \log 2^{3x^2-20x+2}$ e) $\log_3(2-x) + \log_3 4 = 2 - \log_3(x+1)$

f) $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 8 = 0$ g) $\log_2(x+2) - \log_2(x+1) = 2$

9) Rozwiąż nierówności a) $\log_2(3x) > -1$ b) $2 \log x + \log(6-x^2) = 0$ c) $\log_{0,25}(2-x) > \log_{0,25}(\frac{2}{x+1})$

d) $\log_3(\frac{3}{x-1}) \geq \log_3(5-x)$ e) $\log_{0,5}(x-2) - \log_{0,5}(3-x) < 1$ f) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) < -2$

g) $\log_{2x-1}(3x) > 1$ h) $\log_x(3x+7) < 1$ j) $\log_2^2(x) - 9\log_2(x) + 8 < 0$ k) $3\log_3 x - \log_9 x \leq 5$

j) $\log_{2x}(2x^2 - x) \geq 1$ k) $|3 - \log_2 x| < 1$

10) Rozwiąż układ równań:

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 8^{x-2} \cdot 4^{y+1} = 16 \\ 2^{2(x-1)} \cdot 8^y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x+y = \frac{10}{3} \end{cases}$

11) Wyznacz dziedzinę funkcji: a) $f(x) = \frac{\sqrt{\log(9-x^2)}}{2^x-4}$ b) $f(x) = \log_{x+5}(x^2-4) + \sqrt{6-2x}$

c) $f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1} + 1\right) + \sqrt{1 + \log_2 x}$ d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}[1 - \log_2(x^2 - 5x + 6)]$

12) a) Dla jakich x liczby $\log 2, \log(3^x-3), \log(3^x+9)$ w podanej kolejności tworzą wyrazy ciągu arytmetycznego?

b) Dla jakich x liczby $\log 2, \log(2^x-1), \log(2^x+3)$ w podanej kolejności tworzą wyrazy ciągu arytmetycznego?

13) W układzie współrzędnych zaznacz zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek: $\log_{x+1}(y-4) < 1$

14) Dane są zbiory $A = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge \log_2(x+2) < 2\}$ $B = \{x; x \in \mathbb{R} \wedge \log_{\frac{1}{2}}(x+2) < 2\}$

wyznacz zbiory A i B oraz zbiór $A \cap B$.

15) Podaj dla jakich wartości parametru m. równanie $9^x - 3^x + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki?